OS PARÂMETROS ESTRATÉGICOS

Na literatura sobre a Filosofia da Matemática utiliza-se o termo "Programa de Hilbert" para designar o conjunto de ideias que Hilbert, a partir dos anos 20 e até à publicação dos *Grundlagen der Mathematik* em 1934, desenvolveu individualmente e em colaboração com Paul Bernays com o fim de defender e legitimar o raciocínio clássico. Este sistema de pensamento também é conhecido pelo nome de Formalismo, embora Hilbert não seja um formalista no sentido que o termo tinha no tempo de Frege ou que veio depois a ter com a filosofia formalista de Haskell Curry.

Em todo o caso o termo "Programa de Hilbert" é usado em três sentidos diferentes que é necessário desde já separar:

1) Inicialmente, até 1920, o "Programa de Hilbert" denota o primitivo trabalho de Hilbert à volta do problema da Consistência; assim a expressão "Primitivo Programa de Hilbert" é usada para referir esta fase do pensamento de Hilbert;

2) Em geral o termo "Programa de Hilbert" é usado para denotar a generalização dos interesses de Hilbert do problema da Consistência para o problema de mostrar, para uma sucessão φ de fórmulas que seja uma demonstração de "A", que

$$\text{Dem}\,(\varphi, \text{“A”}) \rightarrow A$$

(i.e., estabelece a correcção de A);

3) O termo aparece ainda na expressão "Programa de Hilbert Modificado", a qual denota o trabalho da Escola de Hilbert, depois de 1930, na construção de uma hierarquia de programas de Hilbert, por ordem crescente de utilização de conceitos não-finitistas. Na maioria dos casos o termo é usado no sentido 2) e em geral a atenção ao contexto permite logo determinar em qual dos três sentidos o termo está a ser aplicado.

Antes da publicação dos *Grundlagen der Mathematik* a gestação do pensamento de Hilbert pode-se seguir nos seus ensaios de 1922

«Uma Nova Fundamentação da Matemática» e «Os Fundamentos Lógicos da Matemática» e os três textos em conjunto servem de base para que a seguinte sinopse possa ser construída.

Em contraste com o conhecido *dictum* de Russell nos *Principles of Mathematics*, segundo o qual a matemática pura é a classe de todas as proposições da forma «*p* implica *q*» em que *p* e *q* só contém constantes lógicas, Hilbert concebeu a matemática como uma criação específica e por isso irredutível do intelecto. A sua concepção é congenial com a tendência da época a favor da redescoberta do método Axiomático e assim, já na fase madura do seu pensamento, Hilbert foi levado a ter que caracterizar rigorosamente as diferenças entre o método Axiomático tal como foi praticado até então e a sua própria concepção. No primeiro volume dos *Grundlagen* encontramos a distinção fundamental a fazer entre os dois sentidos do termo *axiomático* os quais se podem captar nos adjectivos *concreto* e *formal*, no sentido da distinção tradicional entre forma e conteúdo. Uma utilização do método Axiomático no sentido de conteúdo toma lugar, segundo Hilbert e Bernays, quando em relação a um corpo de doutrina estabelecida se tenta idealizar os conceitos nela contidos e individualizar um pequeno número de proposições das quais todo o corpo de doutrina pode ser logicamente derivado, um exemplo clássico da qual é a formulação axiomática da geometria de Euclides. Em contraste, uma utilização do método Axiomático no sentido da forma toma lugar quando se começa por construir uma teoria abstracta, desligada de qualquer corpo conhecido de doutrina, propondo conceitos primitivos e proposições arbitrárias, as consequências das quais não dependem de qualquer referência a um sentido para as expressões que as representam.

Sem querer minimizar o interesse do problema prático da aplicação de uma teoria axiomática formal, a questão crucial para Hilbert é a de saber se a teoria é intrinsecamente significativa, mesmo como teoria abstracta. Uma tal teoria é, como se disse, apenas um conjunto de proposições que são dedutíveis por métodos previamente fixados, de outras proposições a que chamamos axiomas; e não é assim significativa no mesmo sentido em que uma teoria construída a partir do método Axiomático concreto, cujo significado se obtém imediatamente da experiência que a teoria é suposta captar. E assim, para demonstrar que uma teoria axiomática formal não é um jogo arbitrário ou trivial, é necessário demonstrar que a estrutura conceptual da teoria existe num domínio especificável, que é possível mostrar que a teoria tem aquilo a que hoje chamaríamos um modelo. Mas como um número considerável de teorias matemáticas não tem uma tradução directa na experiência sensível, o modelo que a teoria tem que satisfazer não tem que ser concretamente especificável, é suficiente que o seja apenas em princípio. Assim, a questão é a de saber se os conceitos primitivos da teoria podem ser interpretados como conceitos específicos de um certo domínio, de tal modo que todos os axiomas se tornem verdadeiros. Uma tal interpretação dos conceitos primitivos constitui por isso uma realização da teoria abstracta. E assim como no cálculo de predicados de primeira ordem se diz que uma fórmula é satisfazível numa interpretação dada se as letras predicativas, as letras funcionais e os símbolos individuais ao serem interpretados dão origem a uma fórmula verdadeira, assim também dizemos que uma teoria é realizável se se pode especificar uma interpretação na qual todos os axiomas resultam em proposições verdadeiras. É importante sublinhar a diferença entre a especificação em princípio e a especificação na prática, de uma realização da teoria, pois só num número restrito de casos se torna possível apresentar a realização na prática, nomeadamente só naqueles casos em que o domínio da interpretação é finito. É possível produzir concretamente uma realização da estrutura abstracta de um grupo escolhendo um grupo finito especificável por uma tabela que possa ser completamente preenchida, e este modelo finito demonstra a realizabilidade da estrutura. O problema começa quando nos deparamos com sistemas de axiomas consideravelmente simples e para os quais não pode haver um modelo finito, como se vê pelo exemplo seguinte:

$$A_1 : (\forall x) \neg R(x, x)$$

$$A_2 : (\forall x)(\forall y)(\forall z)\{[R(x, y) \wedge R(y, z)] \rightarrow R(x, z)\}$$

$$A_3 : (\forall x)(\exists y) R(x, y)$$

Para ver que este sistema de axiomas não pode ser satisfeito por um domínio finito de objectos, o argumento é o seguinte: Supondo que o domínio não é vazio existe um objecto a que podemos chamar simbolicamente «1». Então, pelo axioma A_3, existe um objecto «2» em relação ao qual R («1», «2») é verdadeira. Pelo axioma A_1, «2» é assim diferente de «1». Mas uma nova aplicação do axioma A_3 mostra que tem que existir um objecto «3», para o qual R («2», «3») seja verdadeira. Logo, pelo axioma A_2 , R («1», «3») é verdadeira e pelo axioma A_1 «3» é assim diferente de «2». Assim num domínio finito a reiteração desta argumento não é possível e os axiomas A_1-A_3 não são satisfazíveis. Para os satisfazer é necessário introduzir um domínio infinito, por exemplo, o dos números inteiros e interpretar R como sendo a relação «x é menor do que y»: então os axiomas A_1-A_3 são satisfeitos. Mas um domínio infinito de objectos já não constitui uma totalidade perceptível, de modo que a sua existência carece tanto de uma justificação como o sistema abstracto que era suposto ser justificado pela construção de modelos.

Poderia à primeira vista parecer que a definição implícita dos números naturais por meio dos axiomas de Dedekind-Peano seria um paradigma a seguir para a introdução de totalidades infinitas. Mas esta definição seria por sua vez dependente de uma teoria axiomática abstracta cuja realizabilidade seria de novo questionável e logo incapaz de por si legitimar a introdução do conjunto dos números naturais. A ideia de Hilbert e Bernays é que se pretende usar os números como domínio de objectos para obter uma realização para uma teoria abstracta, é necessário que este conjunto seja objecto de uma percepção directa, não-mediada. Assim, embora não seja possível produzir este conjunto de modo a que todos os seus elementos sejam simultaneamente perceptíveis, é possível construir segmentos de qualquer comprimento em qualquer momento. A ideia básica é a de conceber os indivíduos do domínio a construir representados por símbolos convencionais *1*, *11*, *111*, ... que são susceptíveis de ser obtidos começando com um primeiro símbolo e a seguir obter um segundo pela prefixação de um símbolo idêntico à direita do primeiro e assim sucessivamente. Este símbolos são designados por *numerais* e podemos a seguir introduzir variáveis que denotem um numeral qualquer, por exemplo, letras latinas minúsculas m, n, ... A relação de ordem entre os numerais m e n deixa-se reduzir à inspecção do comprimento comparado de m e n: num número finito de passos podemos decidir acerca do seu comprimento e identificar o maior, no caso de não terem o mesmo comprimento, e assim $m < n$ quando o numeral m tem menos símbolos do que n. Do mesmo modo, se m e n são dois numerais, a soma de m com n, que se denota por $m + n$, é o numeral obtido quando n é aposto à direita de m. Finalmente o produto de m por n, que se denota por $m \cdot n$, é o numeral que se obtém pela substituição de cada símbolo de n por m.

O que é essencial no novo método é que o pensamento matemático toma a forma de experiências conceptuais feitas com objectos que se consideram como conteúdo de uma percepção concreta: na aritmética são os números, dos quais se considera ter essa percepção, e na álgebra são expressões simbólicas com coeficientes numéricos. Para este novo género de raciocínio Hilbert e Bernays adoptaram a designação de «dedução finitista» em que o temo «finitista» é suposto exprimir que a reflexão matemática se desenvolve dentro de limites impostos não só pela efectiva exequibilidade dos processos mas também pelo seu exame concreto. Podemos assim caracterizar o raciocínio finitista pelo facto de os seus objectos serem construídos e não apenas hipoteticamente postulados, e que os processos de cálculo ou definição só são legítimos se se garante que terminam num número finito de passos e que para este número um limite pode ser previamente especificado. Vale a pena esboçar rapidamente o significado finitista de dois processos fundamentais, a *indução* e a *recursão*.

Começando pela indução, seja P uma proposição com um conteúdo elementar e intuitivo acerca de um numeral. Seja P válida para 1 e sabe-se que se P é válida para n então é válida para $n + 1$. Conclui-se assim que P é válida para qualquer numeral k. O significado finitista do princípio da indução consiste no facto de k ser construído a partir de 1 pelo processo de prefixação do símbolo 1. Se se verifica que P é válida para 1 e, a cada prefixação de 1, P é válida para o novo símbolo, então quando terminar a construção de k verifica-se que P é válida para k. Nestas condições a indução não é um princípio autónomo mas antes uma consequência que se segue da construção concreta dos símbolos.

O objectivo da definição recursiva de uma função consiste na introdução de um novo símbolo funcional, por exemplo f, e a definição é feita a partir de duas equações com o seguinte conteúdo:

$f(1) = k$
$f(n + 1) = g(f(n), n)$

em que k é um numeral e g uma função já construída de tal modo que $g(a, b)$ para numerais a e b pode ser calculada e tem como valor também um numeral. Assim, também no caso da definição por recursão não estamos perante um princípio autónomo de definição, mas antes de uma descrição abreviada de certos processos de construção através dos quais de um ou mais numerais dados se obtém de novo um numeral.

Sem entrar agora em detalhes, Hilbert e Bernays mostram a seguir como com estes processos básicos se pode dar um conteúdo finitista às propriedades conhecidas da adição e da multiplicação, ao conceito de número primo e à representação unívoca de qualquer inteiro como um produto de factores primos.

Para fazer um esboço dos princípios de lógica que resultam da adopção do ponto de vista finitista começamos por supor que as proposições P_1, P_2, ... são proposições acerca de numerais. Para o caso de uma proposição em que não ocorrem quantificadores, como $m + n = k$, a questão deixa-se imediatamente resolver através de uma investigação directa cujo fim é a decisão acerca da adequação do juízo expresso, isto é, se $m + n$ representa o mesmo numeral que k ou se, ao contrário, $m + n$ e k não são representações do mesmo numeral. Passando agora ao caso de proposições com quantificadores, uma proposição da forma

$(\forall x)\, A(x)$

é para ser interpretada como *juízo hipotético*, *i. e.*, como uma asserção acerca de cada um dos numerais sob consideração. Este juízo é de facto a articulação de uma lei ou princípio geral que pode efectivamente ser verificado para cada caso individualmente. Uma proposição da forma

$(\exists x)\, A(x)$

é para ser interpretada como um *juízo parcial*, isto é, como uma parte incompleta de uma proposição mais rigorosamente determinada e completamente enunciada. Esta determinação pode consistir ou na imediata apresentação de um numeral x tal que A (x), ou na apresentação de um processo que permita a efectiva construção de um numeral x tal que A (x). Requer-se ainda, de harmonia com a exigência de efectividade essencial dos processos a utilizar, que na apresentação de um processo que permita a construção de um x tal que A (x), o número de passos tenha que ser menor ou igual a um dado inteiro k. No caso da quantificação dupla, uma asserção como

$$(\forall k)\ (\exists m)\ [\ A\ (k) \rightarrow B\ (k, m)\ ]$$

é para ser interpretada como uma parte incompleta de uma proposição que determina a existência de um processo que permita, para qualquer numeral k para o qual A (k), determinar um numeral m que está com k na relação B.

A negação em sentido finitista não coincide sempre com a negação em sentido clássico. Nas proposições em que não ocorrem quantificadores, chamadas proposições elementares, a negação consiste de facto em estabelecer directamente a inadequação do juízo expresso, por exemplo, $m + n = 1$. A negação deste juízo afirma apenas que o resultado da inspecção directa não coincide com o resultado expresso na proposição e assim, para proposições decidíveis, o princípio do *tertium non datur* pode ser sempre usado. O mesmo já não se pode dizer nos casos em que a negação precede quantificadores e assim, do novo ponto de vista, não é imediatamente óbvio o que se deve entender pela negação do juízo expresso com quantificadores.

No caso de ($\exists x$) A (x) o facto do numeral x tal que A (x) não existir pode ser interpretado como querendo significar que não se conhece um numeral x tal que A (x), caso em que esta interpretação se limita a constatar de um *estado de conhecimento* puramente contingente. Para superar esta contingência, a inexistência de um numeral x tal que A (x) tem que ser concebida como uma asserção acerca da impossibilidade de construir um tal x. É-se assim levado a introduzir para uma proposição A o conceito da sua negação finitista $\neg$ A, a qual no entanto já não é exactamente a proposição contraditória de A. ($\exists x$) A (x) e $\neg$ ($\exists x$) A (x) não são como é o caso em $m + n = k$ e $m + n \neq k$ asserções acerca de uma mesma decisão, mas antes representam dois *estados de conhecimento* diferentes: por um lado o conhecimento que permite determinar um x tal que A (x) e, por outro lado, o conhecimento de uma lei geral acerca de numerais. Ora não é imediatamente óbvio que um destes estados de conhecimento tenha que ser alcançado e assim a disjunção

$(\exists x)\ A\ (x) \vee \neg\ (\exists x)\ A\ (x)$

deixa de ser uma fórmula finitistamente válida.

Considerando agora o caso da negação do juízo universal

$(\forall x)\ A\ (x)$,

não é de todo óbvio o que deva ser a interpretação de

$\neg\ (\forall x)\ \mathrm{A}\ (x)$.

Por um lado pode-se interpretar como sendo a refutação do juízo universal por meio de um contra-exemplo. Mas nesse caso existe a mesma dificuldade que encontramos no juízo existencial uma vez que deixa de ser aparente que ou uma lei acerca de numerais x tais que $A\ (x)$, ou a existência de um contra-exemplo para $A\ (x)$, tenham que ser expressos por proposições mutuamente exclusivas; assim também a disjunção

$(\forall x)\ A\ (x) \vee \neg\ (\forall x)\ A\ (x)$

deixa de ser uma fórmula finitistamente válida. Poder-se-ia argumentar que uma refutação de $(\forall x)\ A\ (x)$ não tem que ser feita através de um contra-exemplo, que pode ser feita através de uma demonstração que $(\forall x)\ A\ (x)$ conduz eventualmente a uma contradição. Mas esta solução não é melhor do que a anterior, uma vez que também não imediatamente óbvio que ou uma lei geral acerca de numerais, ou a derivação da consequência absurda que permite a sua refutação, tenham de ser mutuamente exclusivas.

Se voltarmos agora ao problema do significado intrínseco de uma teoria matemática vemos que ele é muito mais acessível quando se trata de uma teoria axiomática abstracta, uma vez que uma tal teoria poderá ser considerada significativa se se pode mostrar um modelo. Se se dispõe de uma realização finita da teoria, então o problema do seu significado é imediatamente dado; se se dispõe de uma realização infinita mas construída na base de princípios finitistas como os que acabamos de descrever, então também temos uma solução para o problema do seu significado. O problema crucial é que estes meios finitistas, tal como definidos acima, têm um âmbito de aplicação relativamente restrito e logo na aritmética dos números inteiros é preciso lançar mão de processos não finitistas, como por exemplo no princípio do mínimo de uma propriedade aritmética. Assim o método de assegurar o significado de uma teoria tem que ser revisto e a ideia de Hilbert foi a de que a fonte de significado deve ser a demonstração da consistência da teoria. Assim qualquer teoria axiomática abstracta teria significado, isto é, seria capaz de descrever uma estrutura, se houvesse uma demonstração de que dos axiomas por meio das regras de inferência não se podia derivar uma contradição. Assim o foco de todo o programa passa para a formulação, para cada teoria matemática, de que os processos de demonstração permitidos não dão origem a uma contradição. Para este corpo de doutrina Hilbert criou o nome de *Teoria da Demonstração*, ou *Metamatemática*, que portanto neste momento se define como o estudo sistemático do domínio de validade das diversas formas de inferência. Em particular, para a demonstração de consistência era exigido que o argumento metamatemático fosse ele por sua vez finitista. E enquanto que ao tempo dos *Fundamentos da Geometria* Hilbert estava interessado em demonstrar a consistência da geometria euclidiana, nos *Fundamentos da Matemática* o seu plano é legitimar toda a matemática clássica por meio do raciocínio finitista.

Para isso Hilbert teve de representar uma teoria matemática dada num sistema dedutivo muito mais rigoroso do que o usual, procedendo assim à *formalização da teoria* ou à sua representação num *sistema formal*. Este sistema formal seria completo no sentido de reproduzir a teoria matemática subjacente, em particular a totalidade dos seus teoremas. Estas teorias formais eram concebidas por Hilbert dum ponto de vista puramente sintáctico; a teoria seria fundada num domínio *postulado* de objectos, um número finito de fórmulas iniciais seria separado e as regras de inferência teriam que ser explicitamente formuladas. Assim são fórmulas deriváveis num sistema assim construído todas aquelas fórmulas que se obtêm das fórmulas de saída ou iniciais através de um número finito de aplicações das regras de inferência. Deste modo será de esperar que a cada teorema da teoria matemática subjacente corresponda uma fórmula derivável do novo sistema formal. E assim, se se dispuser da demonstração de consistência do sistema formal, a legitimação da teoria matemática subjacente está realizada.

Em todo o caso, o uso frequente do raciocínio não-finitista em teorias matemáticas faz com que Hilbert tenha que, nos sistemas formais que são supostos justificar estas teorias, introduzir regras de derivação que correspondem à parte não-finitista da inferência. Suponhamos agora que um sistema formal F representa uma teoria T

com inferências não-finitistas, as quais serão por isso representadas em *F*. Para Hilbert esta situação não é paradoxal por o sistema F ele próprio ser construtivamente definido, e por isso ele próprio susceptível de tratamento finitista, visto que F é um conjunto de sucessões de fórmulas formadas a partir de regras. Nestas condições o programa finitista parece oferecer a possibilidade de legitimar o raciocínio não-finitista.

Para não dar a impressão que o finitismo e o intuicionismo de Brouwer são uma e a mesma coisa, apesar de terem em comum alguns pontos de doutrina, como a rejeição do *tertium non datur*, Brouwer permite o uso de considerações lógicas gerais, ainda que interpretadas de uma maneira mais restritiva do que no realismo clássico; como permite também o uso dos factos da experiência combinatória, os quais são o paradigma da percepção finitista. No intuicionismo domina a noção de que o objecto matemático é essencialmente uma *experiência mental*, a qual consiste na execução de uma demonstração, enquanto que no finitismo de Hilbert encontramos a noção de que o objecto matemático é produzido por uma experiência levada a efeito com objectos concretos, concebidos como formados por partes discretas e de cuja estrutura se pode ter uma percepção de conjunto. Assim é claro que o intuicionismo inclui o finitismo, uma vez que a imagem de um objecto concreto pode ser usada numa construção mental; mas excede o âmbito do finitismo ao permitir asserções acerca de todas as construções possíveis, as quais não constituem uma totalidade em sentido finitista.

Se *Z* for, como nos *Fundamentos da Matemática* de Hilbert e Bernays, a teoria que formaliza a aritmética, o teorema da incompletude de Gödel demonstra a impossibilidade de representar em *Z* todos os teoremas da teoria subjacente e de demonstrar a consistência de *Z* pelos meios da própria teoria. [Sobre a possibilidade de uma extensão do ponto de vista finitista de modo a permitir a demonstração da consistência da aritmética veja-se o ensaio de Gödel «Über eine bisher noch benützte Erweiterung des finiten Stanpunktes».]

Na sua forma original o teorema de Gödel encontra-se no seu trabalho «Acerca de Proposições Indecidíveis dos *Principia Mathematica* e de Sistemas Relacionados». Simplificando agora o seu resultado, o teorema diz que se se adoptar para a aritmética um sistema formal como foi previamente descrito, se este sistema for consistente (num sentido a definir a seguir) existe uma proposição que é verdadeira e que não é demonstrável no sistema. Deste resultado segue-se ainda um segundo teorema, este agora acerca da consistência do sistema, segundo o qual não é possível realizar uma demonstração da consistência do sistema formal recorrendo apenas aos meios do *próprio* sistema.

Começamos pela introdução do predicado metamatemático

$$D\ (y, x),$$

que se interpreta como sendo a asserção «y é o número de Gödel de uma demonstração de uma fórmula com o número de Gödel x». Em particular, na teoria formal Z, este predicado aparece sob a forma

$$D^{+}\ (g, y)$$

com a interpretação «g é o número de Gödel de uma fórmula bem formada $\varphi\ (x_1)$ em que x_1 ocorre livre e y é o número de Gödel de uma demonstração de $\varphi\ (\overline{\mathrm{g}})$». Finalmente

$$D^{\neg}\ (g, y)$$

tem a interpretação «g é o número de Gödel de uma fórmula bem formada $\varphi\ (x_1)$ em que x_1 ocorre livre e y é o número de Gödel de uma demonstração de $\neg\ \varphi\ (\overline{\mathrm{g}})$». Nestes termos, torna-se necessário explicar em que condições é que estas fórmulas ocorrem em Z e assim uma relação aritmética

$$R\ (\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$$

ser exprimível em Z equivale a existir em Z uma fórmula bem formada

$$\varphi\ (\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$$

com n variáveis livres e tal que, para qualquer n-tuplo de números naturais $k_1, ..., k_n$ as duas condições seguintes são satisfeitas:

i) Se $R\ (k_1, ..., k_n)$ é verdadeira então

$$\vdash_{z}\ \varphi\ (\overline{\mathrm{k}_1}, ..., \overline{\mathrm{k}_\mathrm{n}});\ \text{e}$$

ii) se a relação é falsa, então

$$\vdash_{z}\ \neg\ \varphi\ (\overline{\mathrm{k}_1}, ..., \overline{\mathrm{k}_\mathrm{n}})\ .$$

Se em vez de uma relação se trata de uma função aritmética

$$f(x_1, ..., x_n)$$

dizer que esta função *é representável* em *Z* é equivalente a dizer que existe uma fórmula bem formada de *Z*

$$\varphi(x_1, ..., x_n, x_{n+1})$$

com $x_1, ..., x_{n+1}$ variáveis livres tal que, para qualquer $k_1, ..., k_{n+1}$ números naturais, as duas condições são satisfeitas:

i) Se $f(k_1, ..., k_n) = k_{n+1}$, então

$\vdash_z \quad \varphi(\overline{k_1}, ..., \overline{k_{n+1}})$; e

ii) $\vdash_z \quad (\exists^1 x_{n+1})\, \varphi(\overline{k_1}, ..., \overline{k_{n+1}}, x_{n+1})$.

Dois teoremas principais regulam as relações entre os conceitos de expressão, representação e o sistema formal *Z* dos quais faremos uso a seguir:

1. Uma relação aritmética é recursiva se e somente se é exprimível em *Z*;
2. O conjunto das funções recursivas é igual ao conjunto das funções representáveis em *Z*.

Na hipótese de consistência do teorema de Gödel já mencionada, Gödel faz uso do conceito inicialmente descoberto por Tarski de consistência-ω, o qual tem essencialmente o seguinte sentido. Dir-se-á que a teoria *Z* é ω-inconsistente se e só se existe uma fórmula bem formada $\varphi(x)$ tal que se tem para qualquer número natural *n* a demonstração em *Z* de $\varphi(\overline{n})$ e ao mesmo tempo uma demonstração da fórmula $(\exists x) \neg \varphi(x)$. Se ao contrário não é possível em *Z* derivar para qualquer número natural *n* a fórmula $\varphi(\overline{n})$ e ao mesmo tempo uma demonstração da fórmula $(\exists x) \neg \varphi(x)$ então diz-se que *Z* é uma teoria ω-consistente. Um argumento simples mostra que se *Z* é ω-consistente, então é também simplesmente consistente. Para o ver basta fazer a fórmula $\varphi(x)$ ser a fórmula bem formada de *Z*

$$(\forall x)\,(x = x) \rightarrow (x = x).$$

Em particular tem-se para qualquer número natural *n* a demonstração em *Z* de

$(\overline{n} = \overline{n}) \rightarrow (\overline{n} = \overline{n})$.

Logo não existe em Z a demonstração da fórmula

$(\exists x) \neg [(x = x) \rightarrow (x = x)]$.

Logo Z é simplesmente consistente. Colocando-nos agora no ponto de vista semântico, se a teoria Z for interpretada no modelo-padrão, então é ω-consistente.

A ideia condutora da demonstração da existência da proposição indecidível é a de que os predicados «demonstrável» e «refutável» são equivalentes às expressões «existe um número y tal que y é o número de Gödel de uma demonstração da fórmula com número de Gödel m» e «existe um número y tal que y é o número de Gödel de uma demonstração da negação de uma fórmula com o número de Gödel m», respectivamente. A seguinte descrição conceptual, adaptada do Vol. II de Hilbert e Bernays, mostra-nos como se constrói a proposição indecidível:

1. Seja

   $\varphi(x_1)$

   uma fórmula bem formada em que a variável x_1 ocorre livre e seja g o número de Gödel da fórmula $\varphi(x_1)$.

2. De $\varphi(x_1)$ pode-se obter por Inserção no lugar de x_1 a fórmula

   $\varphi(\overline{g})$

   e seja y o número de Gödel de $\varphi(\overline{g})$.

3. Estamos assim em condições de formar o predicado

   $D^+(g, y)$,

   o qual é uma relação recursiva e por isso exprimível em Z por uma fórmula bem formada

   $\Delta(x_1, x_2)$

   com x_1 e x_2 livres.

4. Pela definição de expressão tem-se que se a relação é verdadeira e portanto

   $D(k_1, k_2)$

é verdadeira, então

$$\vdash_{z} \ \Delta(\overline{k_1}, \overline{k_2}).$$

5. Se a relação é falsa e portanto

$$\neg D\,(k_1, k_2),$$

então

$$\vdash_{z} \ \neg\,\Delta(\overline{k_1}, \overline{k_2}).$$

6. Considerando agora o caso em que a relação é falsa e portanto

$$\vdash_{z} \ \neg\,\Delta(\overline{k_1}, \overline{k_2}),$$

é possível a partir de 3. por cálculo de predicados obter a fórmula

$$(\forall x_2) \neg\,\Delta(x_1, x_2)$$

em que x_1 continua livre.

7. Seja então *m* o número de Gödel da fórmula

$$(\forall x_2) \neg\,\Delta(x_1, x_2).$$

8. A sua interpretação é a de que qualquer que seja o número x_2 ele não é o número de Gödel de uma demonstração da fórmula com o número de Gödel x_1.

9. Assim se não existe um número que seja o número de Gödel de uma demonstração da fórmula com número de Gödel x_1, isto equivale a dizer que a fórmula não tem uma demonstração.

10. Como x_1 ocorre livre pode ser substituída pelo numeral que representa o número de Gödel da fórmula

$$(*)\ (\forall x_2) \neg\,\Delta(x_1, x_2).$$

11. Obtém-se assim a fórmula bem formada fechada

$$(**)\ (\forall x_2) \neg\,\Delta(\overline{m}, x_2).$$

12. Mas como foi dito acima (1.-3.) o predicado

$$D^{+}\,(g, y)$$

é satisfeito se e somente se *g* é o número de Gödel de uma fórmula bem formada $\varphi\,(x_1)$ com x_1 livre e *y* o número de Gödel de $\vdash_z \ \varphi\,(\overline{g})$.

13. Como a fórmula (**) provém da fórmula (*) pela substituição de x_1 por *m*, é-se conduzido à proposição seguinte: o predicado

$$D^+\ (m, y)$$

é satisfeito se e só se *y* é o número de Gödel $\vdash_z$ (**).

No seu primeiro teorema, Gödel estabelece que se *Z* é consistente, então a fórmula (**) não é demonstrável em *Z* e que se *Z* é ω-consistente então fórmula ¬ (**) não é demonstrável em *Z*. O argumento é o seguinte: Supor *Z* consistente e *k* o número de Gödel de uma demonstração em *Z* da fórmula (**). Então, por 13., tem-se

$$D^+\ (m, k).$$

Ora, como Δ exprime D^+ em *Z* tem-se

$$\Delta\ (m, k)$$

e pela definição de expressão

$$\vdash_z\ \Delta\ (\overline{m}, \overline{k}).$$

Mas por cálculo de predicados a fórmula (**) implica

$$\neg\Delta\ (\overline{m}, \overline{k}).$$

Esta implicação e a suposição de que (**) é demonstrável em *Z* permitem concluir

$$\vdash_z\ \neg\ \Delta\ (\overline{m}, \overline{k}).$$

Logo *Z* não é consistente.

Suponha-se agora que *Z* é ω-consistente e que existe em *Z* uma demonstração de

$$\vdash_z\ \neg\,(\forall x_2)\,\neg\,\Delta\,(\overline{m}, x_2).$$

Mas como já foi visto acima, se *Z* é ω-consistente, então também é simplesmente consistente. Logo,

$$\neg\ \vdash_z\ (\forall x_2)\,\neg\,\Delta\,(\overline{m}, x_2).$$

Assim, para todo o *n*, *n* não é o número de Gödel de uma demonstração em *Z* de (**). Logo por 13. acima

$(\forall n)\ D^{+}(m, n)$ é falsa.

Tem-se assim em Z

$$\vdash_z \neg \Delta\ (\overline{m}, \overline{n}).$$

Se agora na definição de ω-consistência fizermos φ (x) ser a fórmula

$$\neg \Delta(\overline{m}, x_2)$$

tem-se

$$\neg \vdash_z (\exists x_2)\ \Delta(\overline{m}, x_2).$$

Logo,

$$\neg \vdash_z (\exists x_2)\ \Delta(\overline{m}, x_2).$$

Mas, por cálculo de predicados,

$$\vdash_z \neg(\forall x_2) \neg \Delta(\overline{m}, x_2) \leftrightarrow \vdash_z (\exists x_2)\ \Delta(\overline{m}, x_2).$$

Logo Z não é ω-consistente.

Nestas condições, nem a fórmula (**) nem a fórmula ¬ (**) têm uma demonstração em Z. Uma tal fórmula chama-se por isso *indecidível*.

Como já foi dito, o predicado Δ exprime a relação D^{+} em Z e assim a proposição (**) ao ser interpretada no modelo-padrão resulta na asserção de que

$$D^{+}(m, x_2)$$

é falsa para todo o número natural x_2. Mas como vimos isto significa que não existe em Z uma demonstração da fórmula fechada (**), isto é, esta fórmula afirma a sua própria indemonstrabilidade. Por outro lado, se Z é consistente não existe em Z uma demonstração da fórmula (**). Logo, (**) é indemonstrável em Z portanto é verdadeira no modelo-padrão. Assim existe uma proposição que é verdadeira no modelo-padrão e para a qual não existe uma demonstração em Z. A consequência a que se é conduzido é que o conjunto das demonstrações de Z não contém todas as proposições verdadeiras no modelo-padrão. Como uma teoria formal é completa se, e só se, para qualquer fórmula bem formada se tem dela uma demonstração ou uma demonstração da sua negação, a teoria formal Z é assim incompleta.

Para fazer agora o esboço do que é o segundo teorema de Gödel, a primeira parte do primeiro teorema desempenha um papel essencial. Aí, como se viu, o argumento é que se *Z* é consistente então (**) é indemonstrável. Nestes termos, se a esta implicação juntássemos uma demonstração da consistência de *Z* obteríamos também o resultado do primeiro teorema, isto é, a indemonstrabilidade da proposição indecidível. A ideia geral da concepção de Gödel pode ser expressa do seguinte modo.

Seja *U* uma fórmula arbitrária sem variáveis livres e demonstrável em *Z*. É claro que a Teoria *Z* só é consistente se não existe ao mesmo tempo uma demonstração da fórmula $\neg U$. Seja *k* o número de Gödel da fórmula $\neg U$. Pelo que vimos do primeiro teorema podemos representar em *Z* a proposição de que $\neg U$ é indemonstrável por meio da fórmula

$$\Theta \quad (\forall x_2) \neg \Delta\, (\bar{k}, x_2),$$

e assim dizer que não existe um número que seja o número de Gödel de uma demonstração de uma fórmula com número de Gödel *k*. Logo a primeira parte do primeiro teorema pode ser expressa pela proposição

(≠) se { *Z* é consistente }, então { (**) é indemonstrável }.

Recorrendo ao processo da representação dos objectos de *Z* por meio dos seus números de Gödel, toda a demonstração da fórmula (≠) pode ser expressa em *Z*. Assim, onde ocorre a primeira expressão entre colchetes, { *Z* é consistente }, insere-se a fórmula Θ, e onde ocorre a segunda expressão entre colchetes, { (**) é indemonstrável }, insere-se a própria fórmula (**), uma vez que esta fórmula afirma precisamente a sua própria indemonstrabilidade. É-se conduzido à fórmula

$$(\neq\neq) \quad \Theta \rightarrow **.$$

[A construção completa desta implicação encontra-se no Vol. II dos *Grundlagen* de Hilbert e Bernays, cap. VII.]

Uma vez de posse de uma demonstração em *Z* da implicação acima pode-se formular o segundo teorema de Gödel como afirmando que se *Z* é consistente, então a fórmula Θ não é demonstrável em *Z*. O argumento que o demonstra é essencialmente o seguinte: por hipótese *Z* é consistente. Logo, pela proposição (≠≠), tem-se que $\Theta \rightarrow$ **. Mas pela definição de Θ essa é precisamente a hipótese do teorema. Logo, por *modus ponens*, tem-se em *Z* uma demonstração de (**), o que contradiz o primeiro teorema. Este resultado pode-se interpretar como afirmando que se *Z* é consistente então não existe uma demonstração da consistência de *Z* por meios que sejam eles próprios formalizáveis em *Z*. É claro que a hipótese da Consistência do Segundo Teorema é necessária porque se *Z* não fosse consistente então, como se sabe, qualquer fórmula seria demonstrável.

O teorema pode ainda ser visto como aduzindo evidência contra um parâmetro estratégico essencial do programa de Hilbert. A concepção de Hilbert era a de que os processos de dedução evidentes, os processos finitistamente evidentes, eram apenas uma parte do raciocínio clássico, sendo uma outra parte formada por processos de dedução não finitista. Assim seguir-se-ia naturalmente que para a demonstração da consistência de *Z* os conceitos necessários seriam apenas *uma parte* de todos os conceitos que se podem formalizar em *Z*. O segundo teorema de Gödel prova que estes parâmetros estratégicos são inatingíveis, porque a demonstração de consistência é irrealizável mesmo utilizando todos os processos de *Z*, os mais e os menos evidentes. *A fortiori* é irrealizável utilizando apenas processos finitistamente evidentes de *Z*.