

# É A MATEMÁTICA SINTAXE DA LINGUAGEM?<sup>1</sup>

(\*1953/9-III)

## I. PARTE

### Definições Iniciais

#### §1

[*Definição do ponto de vista sintáctico.*]

À volta de 1930 R. Carnap, H.Hahn e M. Schlick<sup>2</sup>, em grande parte sob a influência de L. Wittgenstein, desenvolveram uma concepção da natureza da matemática<sup>3</sup> que pode ser caracterizada como uma combinação de nominalismo com convencionalismo. Tinha sido adumbrada na doutrina de Schlick acerca das definições implícitas.<sup>4</sup> O seu objectivo principal, de acordo com Hahn e Schlick<sup>5</sup> era conciliar o empirismo estrito<sup>6</sup> com a certeza *a priori* da matemática. De acordo com esta concepção (à qual chamarei subseqüentemente o ponto de vista sintáctico) a matemática pode ser completamente reduzida a (e de facto não é mais do que) sintaxe da linguagem.<sup>7</sup> Isto significa que a validade dos teoremas

---

<sup>1</sup> Tradução de M.S. Lourenço do texto "Is Mathematics Syntax of Language?", publicado em GÖDEL, K. [1995] *Collected Works*. Vol. III: *Unpublished Essays and Lectures*. S. Feferman et al. (ed.). Oxford: Oxford University Press; pp. 334-356.

<sup>2</sup> Cf. Carnap 1935a, pg. 30; Carnap 1934 b, Hahn 1933, Carnap 1935b e Hahn 1935; além disso Hahn 1930, pg. 96; Hahn 1931, pg. 135; Hahn 1933a; Schlick 1938, pg. 145, pg. 222; Wittgenstein 1922.

<sup>3</sup> Neste ensaio os termos "matemático", "matemática" são considerados sinónimos de "lógico-matemático", "lógica e matemática". Além disso, sigo Carnap e uso o termo "lógica" como sinónimo de "matemática", embora não queira implicar que não se pode traçar uma linha de fronteira entre as duas. O termo "axioma" é sempre empregue no sentido de "axioma formal ou regra de inferência ou regra axiomática" em que uma regra axiomática é um processo para se obter um número infinito de axiomas formais.

<sup>4</sup> Cf. Schlick 1918, pg. 30.

<sup>5</sup> Cf. Hahn 1935, pgs. 13, 19 e Schlick 1918, pg. 147.

<sup>6</sup> A tese do empirismo em questão é evidentemente que, em última análise, todo o conhecimento é baseado em percepções (externas ou internas) dos órgãos dos sentidos e de que não somos dotados de uma intuição sobre um espaço de objectos matemáticos abstractos. Além disso, uma vez que em virtude da certeza *a priori* da matemática um tal espaço não pode ser conhecido empiricamente, não se deve de todo supor a sua existência. Logo o objectivo do programa sintáctico também pode ser expresso da seguinte forma: construir a matemática como um sistema de proposições válidas independentemente da experiência, sem usar a intuição matemática ou sem referir quaisquer objectos ou factos matemáticos.

<sup>7</sup> A formulação usada nos ensaios citados é: *A matemática é sintaxe da linguagem*. Todavia uma vez que a matemática é correntemente apresentada como uma ciência de uns certos objectos, acerca dos quais se afirmam certas proposições que são demonstravelmente verdadeiras, a questão é saber se pode ser reduzida à, ou ser substituída pela, sintaxe, i.e., se o que é afirmado em matemática pode ser interpretado como sendo convenções sintácticas e as suas consequências e se, na base desta interpretação, se os teoremas matemáticos são aplicados, *se podem deduzir as mesmas conclusões sobre os factos afirmados*.

matemáticos consiste apenas em serem consequências<sup>8</sup> de certas convenções sintácticas, acerca do uso de símbolos<sup>9</sup>, e não de descreverem estados reais num universo de objectos. Ou como Carnap escreveu: *A Matemática é um sistema de proposições auxiliares, sem conteúdo ou objecto.*<sup>10</sup>

[...]

## §12

[*Nova definição dos termos primitivos. O Requisito da Demonstração de Consistência.*]

De acordo com o que se disse no fim da nota 6, o sentido da frase “A Matemática pode ser interpretada como sendo sintaxe da linguagem” terá que ser (1) que os axiomas formais e os processos de demonstração da matemática podem ser deduzidos de regras de sintaxe adequadamente escolhidas e (2) que a certeza das conclusões acerca de factos, que é obtida pela aplicação de teoremas matemáticos e que, previamente, era baseada na verdade intuitiva dos axiomas, pode ser justificada por considerações sintácticas. No entanto o segundo item exige de novo uma demonstração de consistência para as regras da sintaxe como se pode ver pelos exemplos seguintes:

---

<sup>8</sup> Uma vez que afirmar um teorema matemático é uma consequência *lógica* das regras sintácticas e de uns poucos factos genéricos e triviais sobre símbolos físicos, e uma vez que, além disso, de acordo com o ponto de vista sintáctico, uma consequência lógica apenas repete parte do conteúdo das premissas, chega-se à conclusão de que afirmar a verdade de um teorema matemático é substancialmente a mesma coisa do que repetir parte das convenções acerca do uso dos símbolos. Isto mostra com bastante clareza a falta de conteúdo objectivo da matemática, partindo deste ponto de vista. Se se considerar a situação de um ângulo diferente, pode-se dizer que as regras semânticas, que determinam sob que circunstâncias uma proposição de uma certa forma pode ser afirmada, em certos casos limite têm como consequência que uma proposição pode ser afirmada em *todas* as circunstâncias. Isto torna estas proposições verdadeiras, mas vazias de conteúdo.

<sup>9</sup> E.g., de acordo com *Hahn 1935*, pg. 26 as leis da contradição e do terceiro excluído exprimem certas convenções acerca do uso do sinal de negação.

<sup>10</sup> Cf. *Carnap 1935a*, pg. 36; *Carnap 1935b*, pg. 37. A passagem na sua totalidade é a seguinte: “Wenn zu der Realwissenschaft die Formalwissenschaft hinzugefügt wird, so wird damit *kein neues Gegenstandsgebiet* eingeführt, wie manche Philosophen glauben, die den ‘realen’ Gegenständen der Realwissenschaft die ‘formalen’ oder ‘geistigen’ oder ‘idealen’ Gegenstände der Realwissenschaft gegenüberstellen. *Die Formalwissenschaft hat überhaupt keine Gegenstände*; sie ist ein System gegenstandsfreier, gehaltleerer Hilfsätze.” Gostaria de dizer imediatamente que hoje Carnap dificilmente defenderia as formulações que citei (cf. §45). Além disso algumas delas só foram defendidas por Hahn ou Schlick e provavelmente nunca seriam atribuídas a Carnap. Todavia neste ensaio não tenho por objectivo uma avaliação detalhada do que Carnap disse sobre o tema, o meu objectivo é antes discutir a relação entre a sintaxe e a matemática de um ângulo que, na minha opinião, tem sido negligenciado nas publicações sobre o tema. Porque enquanto que o próprio programa sintáctico e a sua elaboração têm sido, tanto quanto possível, apresentados em detalhe, os resultados negativos acerca da sua exequibilidade, no sentido mais directo e filosoficamente mais interessante, nunca foram suficientemente discutidos.

[...]

## §18

[*A Transformação do Programa Sintáctico no seu Inverso.*]

Uma vez que se se pretende eliminar a intuição matemática, e a aceitação de objectos ou factos matemáticos, por meio da sintaxe, terá certamente que ser exigido que o uso de conceitos “abstractos” e “transfinitos” da matemática, que não podem ser compreendidos ou usados sem o recurso à intuição matemática ou a postulados sob as suas propriedades, seja baseado em considerações sobre combinações finitas de símbolos. Se, em vez disso, na formulação das regras sintácticas alguns dos mesmos conceitos abstractos ou transfinitos são usados - ou na formulação da demonstração de consistência, em alguns dos axiomas usualmente postulados acerca deles - então todo o programa muda completamente de sentido e transforma-se no seu próprio inverso: em vez de esclarecer o sentido dos termos matemáticos não finitistas por meio de uma explicação em termos de regras sintácticas, são os termos não finitistas que são usados na formulação das regras sintácticas; e em vez de justificar os axiomas da matemática pela sua redução a regras sintácticas, estes axiomas (ou pelo menos alguns deles) são necessários a fim de se justificar as regras sintácticas (como consistentes).

[...]

## §24

[*A Consistência da Teoria dos Números leva à introdução de conceitos abstractos.*]

Ora põe-se a questão de saber se este insucesso se aplica apenas às tentativas particulares que foram feitas ou se tem razões mais profundas. A resposta a esta questão depende da extensão precisa de “raciocínio combinatório finitista”. Uma definição explícita deste conceito ainda não foi feita. Mas em vista do trabalho de G. Gentzen<sup>11</sup>, não pode existir qualquer dúvida que esse raciocínio pode ser expresso no formalismo da

---

<sup>11</sup> Por ocasião da demonstração de consistência para a teoria dos números por G. Gentzen (cf. *Gentzen 1938a*) foi estabelecido até que número ordinal é que definições e demonstrações por indução transfinita podiam ser expressas no formalismo da teoria clássica dos números. (Cf. *Hilbert e Bernays 1939*, pgs. 360-374). Assim tornou-se evidente que aquelas definições e demonstrações que não podem ser assim expressas não são finitistas, enquanto que, por outro lado, todas as demonstrações finitistas podem ser representadas como induções a respeito de certos números ordinais.

teoria clássica dos números. Todavia uma vez que, devido a um teorema geral, uma demonstração de consistência, para um sistema que contenha a teoria dos números recursiva primitiva, nunca pode ser expressa no sistema, segue-se que nem mesmo a teoria clássica dos números, muito menos ainda sistemas de maior âmbito, pode ter uma demonstração de consistência usando raciocínio finitista.<sup>12</sup> Este facto de que, além dos conceitos que directamente se referem a combinações de símbolos, certos conceitos abstractos<sup>13</sup> e algumas proposições evidentes acerca deles têm que ser admitidos, a fim de levar a cabo as ideias de Hilbert, foi reconhecido mesmo pelos mais elevados proponentes do formalismo.<sup>14</sup>

[...]

### §31

[*A fundamentação dos axiomas é, em última análise, o seu conteúdo perceptual.*]

Mais precisamente a situação pode ser descrita da seguinte maneira: Que a matemática tem de facto conteúdo (em qualquer sentido aceitável do termo) resulta do facto que, de qualquer maneira, ou em qualquer parte dela que seja construída, é sempre necessário um certo número de termos indefinidos e certos axiomas (i.e., proposições dedutivamente indemonstráveis) acerca destes termos. Para estes axiomas não existe outro fundamento racional (e nem mesmo prático) excepto que ou deles (ou de proposições que os implicam) se pode ter uma percepção directa da sua verdade (ou devido ao sentido dos termos ou por uma intuição dos objectos que pertencem à sua extensão) ou então que são

---

<sup>12</sup> Pode-se argumentar que, para todas as aplicações, é suficiente a consistência até um certo número muito grande, mas finito,  $N$  de passos simples da demonstração e que, além disso, de um ponto de vista estritamente empírico, a questão da consistência só tem sentido até um certo número  $N$  de passos da demonstração, o qual absolutamente não exceda o que possa de algum modo ser realizado no nosso mundo. Todavia, também neste sentido enfraquecido, a consistência não pode de facto ser demonstrada por meio do raciocínio finitista, porque o comprimento de uma demonstração finitista de consistência, neste sentido, teria que ser pelo menos da mesma ordem de grandeza de  $N$ . É uma questão interessante saber se, para cada  $N$ , existe de facto uma tal demonstração limitada de consistência com este comprimento (cf. Nota 42). [Repare-se que a fim de que o comprimento de uma demonstração (i.e., o número de passos simples da demonstração) seja uma verdadeira medida do grau de complexidade, e também por outras razões, terá que ser estipulado que a ocorrência de cada definição e de cada asserção numa demonstração tenha menos do que  $K$  símbolos, em que  $K$  é escolhido de uma vez por todas.]

<sup>13</sup> Cf. Nota 20.

<sup>14</sup> Cf. *Bernays 1941a*, pgs 144, 147; 1935, pgs. 68, 69; 1935b, pg. 94; 1954, pg.2; também *Gentzen 1937*, pg. 203. Nos escritos mais recentes da escola formalista o termo “finitista” foi substituído por “construtivista”, a fim de indicar que é necessário usar certas partes da matemática intuicionista que não estão contidas dentro dos limites do que é directamente dado na intuição sensível.

postulados (como hipóteses físicas) com base em argumentos indutivos, e.g., o seu sucesso em aplicações. Pareceria que o primeiro caso se aplica pelo menos a alguns axiomas matemáticos, e.g., ao *modus ponens* e à indução completa. No segundo caso (tanto quanto se pode julgar que realmente ocorre) o carácter matemático dos axiomas, apesar do seu fundamento indutivo, revela-se na circunstância de terem consequências naquela parte da matemática à qual o primeiro caso se aplica, i.e., cujos termos primitivos têm um sentido imediatamente compreensível (e.g., os axiomas do infinito mencionados na nota 43 têm consequências na teoria dos números).

[...]

### §36

[*A Petitio Principii fundamental é a identidade  
facto = facto empírico = facto sintético sobre sensações.*]

Pode-se demonstrar (ver §§38, 39) que o raciocínio que conduz à conclusão de que não existem factos matemáticos não é mais do que uma *petitio principii*, i.e., “facto” é desde o início identificado com “facto empírico”, i.e., “facto sintético acerca de sensações”. Neste sentido pode-se admitir que a matemática é vazia de conteúdo, mas esta admissão deixa de ter nada a ver com as questões filosóficas mencionadas no §1, uma vez que também os Platonistas concordariam que a matemática não tem qualquer conteúdo deste género. Porque, de acordo com o Platonismo, o conteúdo consiste em relações entre conceitos ou outros objectos abstractos, cuja subsistência é independente das nossas sensações, embora a sua percepção ocorra num género especial de experiência e, embora em conjunção com certas leis da natureza (L), universalmente aceites, tenham mesmo consequências verificáveis pela percepção sensível. (Cf. §16).

[...]

### §39

[*O 6º órgão dos sentidos e a 2ª Realidade.*]

Todavia todas as condições mencionadas podiam muito bem também ser satisfeitas para um fragmento das ciências empíricas, a respeito da parte restante. E.g., podíamos possuir um órgão adicional dos sentidos, o qual nos revelaria uma segunda realidade, completamente separada da realidade espaço-tempo e, além disso, tão regular que podia ser descrita por um número finito de leis. Poderíamos então, por meio de uma decisão arbitrária, reconhecer apenas a primeira realidade como tal, e declarar as percepções do órgão adicional dos sentidos como sendo uma mera ilusão, e as proposições que se referem à outra realidade como sendo destituídas de conteúdo e verdadeiras apenas em consequência de convenções sintácticas. Estas convenções poderiam ser escolhidas de tal maneira a tornar verdadeiras exactamente aquelas proposições que se podiam ver ou inferir ser verdadeiras com a ajuda do suposto órgão adicional dos sentidos.

#### §40

*[Os objectos do 6º órgão dos sentidos são os conceitos formais e as suas relações.]*

Penso mesmo que esta ideia não está muito longe da realidade, excepto que este órgão adicional dos sentidos (i.e., a razão) não se conta entre os órgãos dos sentidos porque os seus objectos são muito diferentes dos objectos dos outros órgãos dos sentidos. Porque enquanto que por meio da percepção sensível conhecemos objectos particulares, as suas propriedades e a as suas relações, com a razão matemática temos a percepção dos conceitos mais gerais (nomeadamente “formais”) e das suas relações, os quais estão separados da realidade espaço-tempo, na medida em que esta é completamente determinada pela totalidade dos particulares, sem qualquer referência a conceitos formais.

[...]