M.S. Lourenço

GERHARD GENTZEN

SOS!

I. INTRODUÇÃO

1. [*Fontes*]
2. [*Motivação*]
3. [*Estrutura*]

3\. 1. [*Alfabeto*]

3\. 2. [*Estratégia*]

II. AS REGRAS

1. [*Regra das Premissas*]
2. [*Regra de* Modus Ponens]
3. [*Regra de* Modus Tollens]
4. [*Regra da Introdução e Eliminação da Negação Dupla*]
5. [*Regra da Demonstração Condicional*]
6. [*Regra da Introdução da Conjunção*]
7. [*Regra da Eliminação da Conjunção*]
8. [*Regra da Introdução da Disjunção*]
9. [*Regra da Eliminação da Disjunção*]
10. [*Regra da* Reductio Ad Absurdum]

I. INTRODUÇÃO

1. [*Fontes*]

O Cálculo da Dedução Natural ou Cálculo de Sequentes foi criado por G. Gentzen em 1935.

Se ao cálculo de Gentzen se tirar a negação dupla obtém-se o Cálculo Mínimo de Johannson. O Cálculo Proposicional Intuicionista é o Cálculo de Johannson com o axioma $a \wedge \sim a \rightarrow x$.

2. [*Motivação*]

Num sistema axiomático de dedução, como o sistema de Hilbert-Bernays para o Cálculo Proposicional e para o Cálculo de Predicados de 1ª Ordem (Ver “Teoria Clássica da Dedução” para o enunciado dos axiomas) só se podem usar como fórmulas iniciais de uma demonstração ou um axioma ou uma proposição já previamente demonstrada. Não é permitido introduzir temporariamente hipóteses ou premissas durante uma demonstração ou fazer a sua conclusão depender de premissas . Mas como na realidade da demonstração matemática se faz amplo uso deste processo, Gentzen procurou formular um sistema que captasse a realidade da experiência matemática, o cálculo da dedução natural. (Contrasta com o carácter suposto ser artificial da dedução axiomática).

3. [*Estrutura*]

Um sequente é uma tabela de 4 colunas por n filas na qual uma derivação está representada.

A notação é uma fórmula em que o martelo separa o conjunto das hipóteses da proposição a derivar:

$$\text{Hipótese } 1, \ldots, \text{hipótese } n \ \vdash \text{ proposição .}$$

Coluna 1: contém os conjuntos de premissas de que um passo na derivação depende, com a notação usual de colchetes para conjuntos;

Coluna 2: os números dos passos, de 1 a *n*;

Coluna 3: as fórmulas de cada passo *i*;

Coluna 4: as justificações de cada passo *i*, o que inclui o número do(s) passo(s) e o nome da(s) regra(s) que legitimam o passo *i*.

A forma final é a seguinte:

{ , }	*i*.	*xxxx*	*j*, Regra

O significado intuitivo é que o conjunto de premissas à esquerda de *i* implica a proposição *xxxx* à sua direita.

3. 1. [*Alfabeto*]

i) Letras latinas minúsculas:

$$a, b, \ldots, x, y, z;$$

ii) Os símbolos funcionais:

$$\sim, \wedge, \vee, \rightarrow;$$

e os quantificadores

$$(\forall x)\ (\exists x)\ .$$

3. 2. [*Estratégia*]

O objectivo estratégico é derivar a fórmula a partir das hipóteses por meio das regras de tal modo que seja decidível em cada passo qual é a acção das regras sobre as fórmulas.

O cálculo do conjunto de premissas para cada passo é estipulado pelas regras usadas no passo.

II. AS REGRAS

1. [*Regra das Premissas*]

Permite a introdução de uma premissa em qualquer passo da demonstração. Uma premissa depende apenas de si própria e por isso, na coluna 1, o número do passo é elemento do conjunto de premissas.

Ex.:

{4}	4.	$a \rightarrow b$	Regra das Premissas

2. [*Regra de* Modus Ponens]

Permite a eliminação da implicação se é dado o antecedente. O conjunto de premissas da conclusão é igual à união dos conjuntos de premissas de que a conclusão depende.

A sua notação é:

$$a \to b,\ a\ \vdash b\ .$$

Dá origem ao sequente:

{1}	1.	$a \to b$	R. Pr.
{2}	2.	a	R. Pr.
{1, 2}	3.	b	1, 2 Regra de *Modus Ponens*

Exercício:

$$a \to (b \to c) , a \to b , a\ \vdash c.$$

Solução:

Os 3 primeiros passos são as premissas e os restantes são aplicações de *MP*:

{1}	1.	$a \to (b \to c)$	R. Pr.
{2}	2.	$a \to b$	R. Pr.
{3}	3.	a	R. Pr.
{1, 3}	4.	$b \to c$	1, 3, *MP*
{2, 3}	5.	b	2, 3, *MP*
{1, 2, 3}	6.	c	4, 5, *MP*

3. [*Regra de* Modus Tollens]

Permite a eliminação da implicação com a negação do antecedente. O cálculo do conjunto de premissas é como em *MP*.

A sua notação é:

$$a \rightarrow b,\ \sim b \vdash \sim a.$$

É representada pelo sequente

{1}	1.	$a \rightarrow b$	P
{2}	2.	$\sim b$	P
{1, 2}	3.	$\sim a$	1, 2, *MT*

Exercício:

$$a \rightarrow (b \rightarrow c),\ a,\ \sim c \vdash \sim b.$$

4. [*Regra da Introdução e Eliminação da Negação Dupla*]

i) $a \vdash \sim\sim a$

ii) $\sim\sim a \vdash a$

Exemplo:

{1}	1.	a	P
{1}	2.	$\sim\sim a$	1, Neg. Dpl.

5. [*Regra da Demonstração Condicional*]

Permite a introdução da implicação

$$a \rightarrow b$$

se previamente se derivou b a partir da premissa a.

No cálculo do conjunto de premissas da fórmula $a \rightarrow b$, o número do passo a não é elemento do conjunto de premissas na fila $a \rightarrow b$. Diz-se então que a premissa a foi descarregada.

O padrão é o seguinte:

{1}	1.	a	RP
…	…	…	…
{1, ?}	n.	b	R???
{n}	n +1.	$a \rightarrow b$	1, n, DC

Exercício:

$$a \rightarrow (b \rightarrow c) \vdash b \rightarrow (a \rightarrow c).$$

Solução:

A regra das Premissas permite introduzir a premissa do enunciado e ainda as premissas adicionais b e a. Duas aplicações de *MP* e duas aplicações de DC dão a fórmula pedida. O cálculo do conjunto de premissas da fórmula de chegada tem que ser {1}.

Exercício:

$$b \rightarrow c \vdash (\sim b \rightarrow \sim a) \rightarrow (a \rightarrow c).$$

Solução:

A melhor táctica é usar a Regra das premissas e usar como premissas adicionais $\sim b \rightarrow \sim a$ e a.

[Se julga que é ilícito usar como premissas material que está à direita do martelo, pense que a regra DC vai fazer com que esse material não figure no cálculo do conjunto de premissas da fórmula final.]

6. [*Regra da Introdução da Conjunção*]

Permite a introdução da conjunção $a \wedge b$ se se tem as premissas a, b. O conjunto de premissas da conjunção é igual à união dos conjuntos das premissas.

Exemplo:

{1}	1.	a	P
{2}	2.	b	P
{1, 2}	3.	$a \wedge b$	1, 2, $\wedge$-Int.

7. [*Regra da Eliminação da Conjunção*]

Permite a eliminação da conjunção $a \wedge b$ em favor de um dos termos a, b. O conjunto de premissas do termo final é igual ao do passo em que a conjunção ocorre.

Exemplo:

{1}	1.	$a \wedge b$	P.
{1}	2.	b	1, $\wedge$-Elm.

Exercício:

$$(a \wedge b) \rightarrow c \ \vdash \ a \rightarrow (b \rightarrow c)$$

Solução:

Defina a sua táctica pela pergunta: quais são as hipóteses adicionais que mais directamente conduzem ao objectivo?

8. [*Regra da Introdução da Disjunção*]

A sua notação é

$$a \vdash a \vee b$$

Permite a introdução da disjunção $a \vee b$, dado um dos termos como premissa. O conjunto de premissas da disjunção é igual ao do da premissa.

Exemplo:

{1}	1.	a	RP
{1}	2.	$a \vee b$	1, $\vee$-Int.

Exercício:

$$a \vee b \vdash b \vee a.$$

9. [*Regra da Eliminação da Disjunção*]

Se de ambos os termos de uma disjunção $a \vee b$ se pode derivar c, então a regra permite a derivação de c. Na coluna 4 a justificação de c tem que ter 5 dígitos: um para o número em que ocorre $a \vee b$ e os 2+2 restantes são os números da ocorrência de a e da derivação de c a partir de a e o número da ocorrência de b e da derivação de c a partir de b.

O padrão é o seguinte:

1.	$a \vee b$
2.	a
…	…
k.	c
k+1.	b
...	…
m.	c
n.	c

A justificação à direita é: 1, 2, k, k+1, m, $\vee$-Elm.

Exercício:

O exercício anterior por $\vee$-Elm.

{1}	1.	$a \vee b$	P
{2}	2.	a	P
{2}	3.	$b \vee a$	2, $\vee$-Int.
{4}	4.	b	P
{4}	5.	$b \vee a$	4, $\vee$-Int.
{1}	6.	$b \vee a$	1, 2, 3, 4, 5, $\vee$-Elm.

Numa demonstração por $\vee$-Elm a fórmula que se pretende demonstrar ocorre 3 vezes: uma 1ª em que depende de um termo da disjunção, uma 2ª em que depende do outro termo e uma 3ª em que depende apenas da disjunção inicial

O conjunto de premissas da fórmula final é por isso igual ao da disjunção inicial.

Exercício:

$$b \rightarrow c \;\vdash\; (a \vee b) \rightarrow (a \vee c).$$

10. [*Regra da* Reductio Ad Absurdum]

Permite a derivação de a depois de ser provado que $\sim a$ conduz a uma contradição. A premissa $\sim a$ chama-se "a hipótese da reductio". Na justificação de a à direita são lançados os números dos passos da hipótese da *reductio* e da contradição. O conjunto de premissas à esquerda de a não contem a hipótese da *reductio* como elemento. Ela é descarregada como em DC.

Exemplo:

$$a \rightarrow b, a \rightarrow \sim b \;\vdash\; \sim a.$$

{1}	1.	$a \rightarrow b$	P
{2}	2.	$a \rightarrow \sim b$	P
{3}	3.	a	Hip. *Red.*
{1, 3}	4.	b	1, 3, *MP*
{2, 3}	5.	$\sim b$	2, 3, *MP*
{1, 2, 3}	6.	$b \wedge \sim b$	4, 5, $\wedge$-Int.
{1, 2}	7.	$\sim a$	3, 6, *Red. Ad Abs.*

Exercício:

Com *Red. Ad Abs.* derivar o sequente para

$$a \rightarrow \sim a \;\vdash\; \sim a.$$