

**ACERCA DE UMA EXTENSÃO
ATÉ AGORA NÃO UTILIZADA
DO PONTO DE VISTA FINITISTA¹**

P. Bernays chamou diversas vezes a atenção² para o facto de que em virtude da indemonstrabilidade da Consistência de um sistema, por métodos de demonstração mais elementares do que os do próprio sistema, é necessário ultrapassar os limites da matemática finitista em sentido hilbertiano para demonstrar a Consistência da Matemática clássica, mesmo da própria Teoria clássica dos Números. Uma vez que a matemática finitista é definida³ como a matemática da evidência *concreta*, isso significa que (como também Bernays explicitamente formulou em *L'enseignement mathématique*, 34 (1935), pg. 62 e 69) para a demonstração da

¹ Tradução do original alemão do célebre trabalho publicado por Gödel em 1958, "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes", *Dialectica* 12, pp. 280-287.

² Ver por ex. : *Entretiens de Zurich* (ed. de F. Gonseth, 1941), pg. 144, 147; e ainda HILBERT-BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, Vol. 2 (1939), § 5; e *Rev. Internat. Phil.* Nr. 27-28 (1954), Fasc. 1-2, pg. 2.

³ Comparar com a formulação de Hilbert em *Math. Ann.* 95 (1925), pg. 171-173.

Consistência da Teoria dos Números se tem que usar alguns conceitos *abstractos*. Compreendem-se como conceitos abstractos (ou não-concretos) os que são essencialmente ou de segunda ou de ordem ainda maior, isto é, que em vez de conterem propriedades ou relações de *objectos concretos* (por exemplo de combinações de símbolos), fazem referência a *estruturas de pensamento* (por exemplo a demonstrações, ao sentido de proposições etc.) de tal modo que nas demonstrações se faz uso de juízos sobre estas proposições os quais não resultam das propriedades combinatórias (espacio-temporais) das combinações de símbolos que as representam, mas antes do seu *sentido*.

Embora, devido à inexistência de um conceito preciso de evidência concreta, respectivamente abstracta, não exista uma demonstração rigorosa da constatação de Bernays, não pode no entanto praticamente subsistir qualquer dúvida acerca da sua correcção, em particular desde a demonstração de Gentzen da formalização, na Teoria dos Números, de todas as recursões em números ordinais menores do que ε_0 . Assim a validade da inferência recursiva para ε_0 não pode certamente ser interpretada como imediatamente concreta, como por exemplo ainda é possível

com ω^2 . Isto significa mais precisamente que se deixa de ter a percepção simultânea do conjunto das possibilidades estruturais que existem para sucessões descendentes e, por essa razão, não existe qualquer conhecimento concreto de que cada uma destas sucessões tem que necessariamente terminar. Em particular, este conhecimento concreto não pode ser realizado por uma transição gradual de ordinais menores para ordinais maiores, mas apenas um conhecimento abstracto, com o recurso a conceitos de ordem superior. Este último passo é garantido pelo conceito de “acessibilidade”⁴, o qual é definido como a demonstrabilidade informal da validade de uma dada forma de inferência. Também no âmbito do que é para nós a matemática concreta não é possível reconduzir a inferência por indução, a partir de um número ordinal suficientemente grande, a uma cadeia de outras percepções. Qualquer tentativa de o fazer conduz a induções que são essencialmente da mesma ordem. Se a necessidade de conceitos

⁴ W. Ackermann esclarece em *Math. Zeits.*, Bd. 53, pg. 407, que “acessível” tem um sentido concreto quando se compreende demonstrabilidade como demonstrabilidade formal, a partir de regras dadas. Mas deve no entanto reparar-se que a validade da inferência de uma determinada propriedade por indução transfinita só se segue com o recurso a conceitos abstractos (ou com o recurso a indução transfinita na metamatemática). De resto o conceito de “acessível” pode ser substituído, pelo menos para induções até ε_0 , por conceitos abstractos mais fracos (comparar com HILBERT-BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, Bd. 2).

abstractos é apenas condicionada pela impossibilidade prática de se ter uma percepção⁵ concreta e combinatória de situações demasiado complexas, ou ela tem antes razões de princípio, não é decidível sem reflexão adicional. No segundo caso, depois de se terem tornado precisos os conceitos em causa, deveria ser possível uma demonstração rigorosa daquela necessidade.

Em qualquer caso a constatação de Bernays ensina a distinguir duas partes componentes da atitude finitista, nomeadamente em primeiro lugar o elemento construtivo, o qual consiste em que só se pode falar de objectos matemáticos na medida em que se pode exhibilos ou obtê-los através de uma construção; em segundo lugar o elemento especificamente finitista, que exige além disso que os

⁵ Repare-se que uma caracterização adequada em Teoria da Demonstração de uma *idealização* (abstraindo da impossibilidade acima mencionada) da evidência concreta, conterà formas de inferência que para nós não serão concretas mas que poderão muito bem permitir uma redução da inferência indutiva a uma inferência de uma ordem essencialmente mais pequena. Uma outra possibilidade de efectuar uma extensão do primitivo ponto de vista finitista, para a qual o mesmo pode ser dito, consiste em impor que os conceitos abstractos, que só poderão referir conceitos finitos e objectos (e de facto de uma forma finita e combinatória) sejam incluídos na matemática finita e que depois este processo seja reiterado. Um exemplo de tais conceitos são os que estão envolvidos na reflexão sobre o conteúdo de formalismos finitos já construídos. Um sistema formal que corresponde a esta concepção foi proposto por G. Kreisel. Comparar com a sua conferência no Congresso Internacional de Matemática em Edimburgo, 1958. Repare-se que numa tal extensão do ponto de vista finitista o elemento abstracto ocorre de uma forma essencialmente mais fraca do que ocorre na extensão que a seguir vai ser proposta, ou do que ocorre na lógica intuicionista.

objectos, acerca dos quais se faz asserções e com os quais construções podem ser efectuadas e as quais se obtêm a partir deles, têm que ser “concretos”, o que significa em última análise que têm que ser estruturas espacio-temporais de elementos, as propriedades dos quais, exceptuando a igualdade e a desigualdade, são irrelevantes. (Ao contrário na lógica intuicionista tais objectos são demonstrações e o sentido de proposições).

É esta segunda exigência que tem que ser abandonada. Até aqui este facto era tomado em conta pela adjunção à matemática finitista de partes da lógica intuicionista e da teoria dos números ordinais. Mostra-se a seguir que para a demonstração da consistência da Teoria dos Números em vez desta adjunção se pode usar o conceito de uma função calculável de tipo finito sobre os números naturais e certos princípios muito elementares de construção. Para isso explica-se o conceito “função calculável de tipo t ” da seguinte maneira: 1. As funções calculáveis de tipo 0 são os números naturais. 2. Se os conceitos “função calculável de tipo t_0 ”, “função calculável de tipo t_1 ”, ... , “função calculável de tipo t_k ” (em que $k \geq 1$) já foram definidos então define-se uma função calculável de tipo (t_0, t_1, \dots, t_k) como uma operação que é sempre realizável (e construtivamente

reconhecível como tal), a qual cada k -tuplo de funções calculáveis dos tipos t_1, t_2, \dots, t_k faz corresponder uma função calculável de tipo t_0 . Tem que se considerar este conceito⁶ como imediatamente compreensível⁷ pressupondo que os conceitos “funções calculáveis de tipo t_i ” ($i = 0, 1, \dots, k$) já foram compreendidos. Por se considerar o tipo t como variável, obtém-se o conceito, necessário para a demonstração da consistência, de uma função calculável de tipo finito t .

Como axiomas evidentes utilizam-se além dos Axiomas da Identidade (também para funções)⁸, os Axiomas 3 e 4 de Peano e a Regra de Substituição para variáveis livres e ainda, primeiro, axiomas que permitam definir funções através de uma equação com

⁶ Pode-se duvidar se temos uma concepção suficientemente nítida do conteúdo deste conceito, mas não se pode duvidar da validade dos axiomas que a seguir se apresentam para este conceito. A mesma situação aparentemente paradoxal obtém para o conceito que fundamenta a lógica intuicionista, de demonstração evidentemente correcta. Como as reflexões que se seguem e a interpretação intuicionista da teoria das funções recursivas e dos funcionais mostram, ambos os conceitos são, dentro de certas fronteiras, como conceitos fundamentais, mutuamente substituíveis. Para isso é preciso ter em conta que se o conceito de função calculável não contém implicitamente o conceito de demonstração, então a realizabilidade das operações tem que ser imediatamente perceptível a partir da cadeia de definições, como é o caso com todas as funções do sistema T que se apresenta a seguir.

⁷ É conhecido que A. M. Turing com a ajuda do conceito de uma máquina de calcular deu uma definição do conceito de uma função calculável de primeira ordem. Mas se este conceito não tivesse já sido previamente compreensível, a pergunta sobre se a definição de Turing é adequada não teria qualquer sentido.

⁸ A identidade entre funções é para ser compreendida como igualdade intensional ou igualdade definicional.

um termo, já construído a partir de variáveis e de constantes previamente definidas, por meio de indução simples sobre uma variável numérica e, segundo, a inferência por indução completa sobre uma variável numérica. O que significa que os axiomas deste sistema (a que se chamará T) são formalmente quase os mesmos⁹ dos da teoria das funções recursivas primitivas, mas as variáveis (excepto aquelas sobre as quais se aplica a indução), tal como as constantes definidas, podem ter um tipo arbitrariamente finito sobre os números naturais. Para simplificar no que se segue junta-se o cálculo proposicional bivalente aplicado a equações, embora as funções de verdade sejam substituíveis por funções da teoria dos números. Não são permitidas variáveis ligadas. O sistema T tem o mesmo poder demonstrativo de um sistema da teoria das funções recursivas em que seja permitida a indução completa para todos os números ordinais menores do que ε_0 (na sua representação usual).

A recondução da consistência da teoria clássica dos números à do sistema T consegue-se com o auxílio da seguinte interpretação da

⁹ Na definição pela equação com um termo ocorre no entanto uma diferença, uma vez que também uma função P de um tipo mais alto pode ser definida por $[P(x_1, x_2, \dots, x_n)] (y_1, y_2, \dots, y_n) = E$. Mas esta diferença desaparece se funções n -árias forem substituídas por funções unárias da maneira prescrita por Church.

teoria dos números de Heyting, à qual por sua vez se pode reconduzir a consistência da teoria clássica¹⁰:

A cada fórmula F da teoria intuicionista dos números¹¹ (cujas variáveis livres na sua totalidade se representará por x) faz-se corresponder uma fórmula F' com a forma $(\exists y)(z)A(y, z, x)$, em que y e z são sucessões finitas de variáveis de qualquer tipo e $A(y, z, x)$ é uma expressão sem quantificadores na qual não ocorrem outras variáveis além de y, z, x . As variáveis das sucessões x, y, z , cujo número de termos também pode ser nulo, são todas distintas entre si. A sucessão composta por x e y por esta ordem denota-se por $x y$.

Será usada a notação seguinte:

1. v, w , são sucessões finitas de variáveis de qualquer tipo; s, t são variáveis numéricas; u é uma sucessão de variáveis numéricas.
2. V é uma sucessão de variáveis cujo número e tipo são determinados pelo facto de cada uma delas poder ser aplicada

¹⁰ Comparar com *Ergebnisse eines math. Kolloquiums*, herausg. Von K. MENGER, Heft 4 (1933), pg. 34.

¹¹ A teoria dos números deve ser formalizada de tal modo que não ocorram quaisquer variáveis para proposições ou para funções. Tem que se considerar que os axiomas do cálculo proposicional são esquemas para todas as inserções possíveis.

a y como sucessão de argumentos e de que a sucessão dos valores assim obtidos (que se denotará por $V(y)$) concorda com os da sucessão v no que respeita ao número e ao tipo dos seus membros.

3. Analogamente a sucessão de variáveis Y (respectivamente Z , respectivamente \bar{Z}) é determinada, no que diz respeito ao número e ao tipo dos seus membros, pela sucessão de argumentos s (respectivamente yw , respectivamente y) e pela sucessão y (respectivamente z , respectivamente z) com o mesmo tipo da sucessão dos valores.

Funções com 0 argumentos e valores de tipo τ serão identificados com objectos de tipo τ , sucessões de variáveis com 1 termo serão identificadas com variáveis.

A correspondência de F' para F é feita por indução sobre o número k de operadores lógicos que ocorrem em F . (As condições a observar para a escolha de símbolos para as variáveis ligadas assim como a fundamentação heurística das definições serão dadas depois das fórmulas.)

I. Para $k = 0$ seja $F' = F$.

II. Seja $F' = (\exists y)(z) A(y, z, x)$ e

$$G' = (\exists v)(w) B(v, w, u) \text{ já definidos}$$

então *per definitionem* :

$$1. (F \wedge G)' = (\exists y v)(z w) [A(y, z, x) \wedge B(v, w, u)].$$

$$2. (F \vee G)' = (\exists y v t)(z w) [t = 0 \wedge A(y, z, x) \vee t = 1 \wedge \\ \wedge B(v, w, u)].$$

$$3. [(s)F]' = (\exists Y)(s z) A(Y(s), z, x).$$

$$4. [(\exists s)F]' = (\exists s y)(z) A(y, z, x).$$

$$5. (F \supset G)' = (\exists V Z)(y w) [A(y, Z(y, w), x) \supset \\ \supset B(V(y), w, u)].$$

$$6. (\neg F)' = (\exists \bar{Z})(y) \neg A(y, \bar{Z}(y), x).$$

s é uma variável numérica arbitrária. Antes de se aplicar as regras 1 - 5 pode ser necessário redenominar as variáveis ligadas das fórmulas F' e G' de modo a que sejam distintas entre si e também distintas das variáveis das sucessões x e u . Além disso as variáveis ligadas das sucessões t , Y , V , Z , \bar{Z} que são introduzidas pela aplicação das regras 2, 3, 5, 6 têm que ser escolhidas de modo a que sejam distintas entre si e distintas das variáveis que já ocorrem nas respectivas fórmulas.

Repare-se que 6. se segue de 5., se $\neg p$ for definido por $p \supset . 0=1$.

5. obtém-se (nos casos especiais que ocorrerem) identificando a proposição $(\exists x) H(x) \supset (\exists y) R(y)$ (respectivamente $(y) R(y) \supset (x) H(x)$) com a existência de funções calculáveis definidas para todas as sucessões de argumentos do tipo da sucessão de variáveis x , as quais fazem corresponder a cada exemplo para o Implicans (respectivamente cada contra-exemplo para o Implicatum) um exemplo para o Implicatum (respectivamente um contra exemplo para o Implicans).

Evidentemente que não se pretende afirmar que as Definições 1-6 reflectem o sentido das partículas lógicas introduzidas por Brouwer e Heyting. Até que ponto é que aquelas definições podem substituir estas partículas só pode ser decidido por uma investigação em detalhe. Mostra-se facilmente que se F é demonstrável no sistema Z da Teoria dos Números de Heyting então pode-se definir funções Q em T para as quais $A(Q(x), z, x)$ é demonstrável em T . Nomeadamente é fácil de verificar que esta afirmação é válida para os axiomas de Z e que a sua correcção é conservada das premissas para a conclusão na aplicação de regras de inferência de Z .

A verificação é especialmente facilitada se se adopta de partida o seguinte sistema de axiomas da lógica intuicionista¹²:

Axiomas: Taut, Add, Perm, e os axiomas duais destes para \wedge , $0 = 1$, $\supset p$ ($\neg p$ é definido por $p \supset . 0 = 1$).

Regras de Inferência: Modus Ponens, a Regra da Inserção para variáveis livres, Syll (com duas premissas), Sum, Exp, Imp, as regras da introdução e da eliminação de um quantificador universal (respectivamente existencial) no Implicatum (respectivamente Implicans) de uma implicação já demonstrada.

Para a demonstração da consistência da Teoria Clássica dos Números são elimináveis os axiomas e as regras de inferência que contêm \vee e \exists . Verifica-se que para todas as regras que se seguem de Sum, a proposição a demonstrar em T é essencialmente a mesma que já foi demonstrada a partir da premissa.

É claro que pressupondo os mesmos conceitos básicos se pode construir sistemas muito mais fortes do que T, permitindo por

¹² Relativamente às designações, comparar com *Principia Mathematica*, 2ª ed., pg. XII. As mesmas designações são também usadas para as regras de inferência que correspondem às fórmulas.

exemplo tipos transfinitos ou a forma de inferência usada por Brouwer na demonstração do “Teorema do Leque”¹³.

ABSTRACT

P. Bernays chamou a atenção para o facto de que para se demonstrar a consistência da teoria clássica dos números se tem que fazer uma extensão do ponto de vista finitista de Hilbert, permitindo além dos conceitos combinatórios que se referem a símbolos certos conceitos abstractos. Os conceitos abstractos, que até agora têm sido utilizados para este fim, são os da teoria dos números ordinais construtivos e da lógica intuicionista. Mostra-se que em vez destes se pode utilizar o conceito de uma função calculável de tipo finito simples sobre os números naturais, em que não são necessários outros processos de construção para tais funções além da recursão simples sobre uma variável numérica e a substituição recíproca de funções (com funções triviais como ponto de partida).

¹³ Comparar com A. HEYTING, *Intuitionism*, 1956, pg. 42.

