

O QUE FOI O CONSTRUTIVISMO *STRICTO SENSU* DE GÖDEL?

M.S. Lourenço

<http://www.fl.ul.pt/pessoais/msslourenco>

Agosto de 2008

Índice

- §1 Por quem Deus nos manda avisar 2 [*página*]
- §2 Opções estratégicas em sistemas intuicionistas 2
- §3 Demonstração de que o Sistema de Heyting não é construtivo *stricto sensu* 3
- §4 Análise do conceito de Construtividade *stricto sensu* 4
- §5 Descrição estrutural do Sistema construtivo *stricto sensu* \mathcal{G} 6
- §6 Hierarquia de Modelos para \mathcal{G} 7
- §7 Esquemas de Definição e Axiomas para \mathcal{G} 9
- §8 Equivalência Intensional na Interpretação do Cálculo Proposicional em \mathcal{G} 11
- §9 O Axioma da Escolha na Interpretação dos Quantificadores 14
- §10 Um Equivalente Clássico do *Tertium non Datur* e *Modus Ponens* em \mathcal{G} 15
- §11 Uma 2.^a Demonstração da Consistência da Teoria Clássica dos Números 17

- Literatura 19

§1

Por quem Deus nos manda avisar

O Construtivismo *stricto sensu* de Gödel foi o primeiro estágio daquela sua interpretação da lógica intuicionista cuja forma definitiva foi atingida com o trabalho de 1958, “Acerca de uma Extensão até agora não utilizada do ponto de vista finitista”¹. É também um de entre vários momentos em que Gödel coloca a posição intuicionista como uma *redesignação* ampliada da lógica clássica. Acima de tudo é um exemplo radioso de quanto se pode fazer em Filosofia por meio da análise de conceitos.

É claro que o interesse e o valor dos resultados obtidos por esta análise não são reconhecidos se já *previamente* se adoptou a posição intuicionista. Mas deixar avaliar o *insight* de Gödel, na análise dos conceitos básicos da lógica intuicionista, por um intuicionista convicto, representa um grau de futilidade intelectual idêntico ao que se atingiria se se pedisse a Lenine uma avaliação do Sermão das Bem-Aventuranças.

§2

Opções estratégicas em sistemas intuicionistas

Enquanto que na filosofia intuicionista são rejeitados dois instrumentos clássicos de inferência lógica, a definição impredicativa e o uso do *tertium non datur*, no semi-intuicionismo² apenas se rejeita a definição impredicativa. Assim embora distintas, *prima facie*, a rejeição do *tertium non datur* parece ser a mais profunda das duas, uma vez que afecta a lógica subjacente.

¹ Cf. GÖDEL, K., *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*, 2.^a ed., Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa (no prelo).

² Cf. WEYL, H. [1940], “The Mathematical Way of Thinking”, [Bicentennial Conference at the University of Pennsylvania].

Esta impressão desfaz-se se se abandonar a definição intuicionista de disjunção. Para o fazer basta reformular $X \vee Y$ como $\neg (\neg X \wedge \neg Y)$. Assim o *tertium non datur* $X \vee \neg X$ tem por esta reformulação a forma

$$\neg(\neg X \wedge \neg\neg X),$$

a qual é uma versão intuicionisticamente válida do princípio da não-contradição.

O mesmo processo de reformulação pode ser aplicado a demonstrações não-construtivas de proposições existenciais, se se abandonar a concepção intuicionista do quantificador existencial em favor de

$$\neg(\forall x) \neg F(x).$$

Em geral, por este processo, uma demonstração em lógica clássica é uma demonstração intuicionisticamente correcta, excluída a ocorrência de definições impredicativas.

§3

Demonstração de que o Sistema de Heyting não é construtivo *stricto sensu*

Assim que relação existe entre a lógica clássica e a lógica intuicionista? Como se vê pelo argumento aduzido acima a lógica clássica está contida na lógica intuicionista e esta é apenas uma transformação nominal daquela.³

Mas para determinar o *sentido* em que a lógica intuicionista pode ser dita ser construtiva, é necessário fazer a *análise dos conceitos* usados nas opções estratégicas do intuicionismo. E ao fazê-la constata-se em primeiro lugar a incongruência entre, por um lado, não permitir a aplicação da negação a proposições universais e, por outro, permitir sem restrições o uso do conceito de “contradição” o qual envolve, necessariamente, o

³ LOURENÇO, M.S. [2007], “A Primeira Demonstração de Gödel da Consistência da Aritmética” in *Do Círculo de Viena à filosofia analítica contemporânea*, A. Zilhão (org.), Lisboa: Livros de Areia.

conceito de negação. Em particular, a análise agora dos *axiomas* postulados como evidentes acerca do conceito de contradição, revela que eles conduzem a um cálculo equivalente ao da negação da lógica clássica.

Em segundo lugar, se se passar agora à análise dos conceitos primitivos da lógica intuicionista, constata-se que eles são formulados em termos do conceito de “demonstração *construtiva*”, ou de “demonstração intuicionisticamente correcta”.

Gödel considera na sua análise dois paradigmas usados na literatura intuicionista, a já mencionada negação e a implicação.

A negação de X é entendida como a possibilidade de derivar uma contradição a partir de X . A implicação de Y por X é entendida como a possibilidade de derivar Y a partir de X . Em qualquer dos exemplos, no entanto, a ocorrência do conceito “derivar” não tem o significado usual, i.e., não tem como denotação uma sucessão de fórmulas num sistema formal explícito. Nestes exemplos uma derivação tem que ser compreendida como um *objecto imediato* da Intuição. Justifica-se assim a questão de saber em que medida o conceito intuicionista de “demonstração *construtiva*” é ele próprio construtivo.

Utilizando como medida o conceito de *construtividade stricto sensu* (a ser definido a seguir) Gödel demonstra que o conceito de “demonstração *construtiva*”, a que se apela na lógica intuicionista, não é ele próprio construtivo.

Mas para algumas aplicações importantes, como a Teoria dos Números, é possível redefinir este e outros conceitos primitivos da lógica intuicionista, de modo a que as exigências da construtividade *stricto sensu* sejam satisfeitas.

§4

Análise do conceito de construtividade *stricto sensu*

Para a execução da análise do conceito de construtividade *stricto sensu* é necessário especificar as seguintes três cláusulas, que caracterizam um sistema de axiomas \mathcal{G} como *construtivo stricto sensu*:

SS1: Para quaisquer argumentos, a decidibilidade de todas as relações primitivas de \mathcal{G} e, em particular, a computabilidade de todas as funções de \mathcal{G} .

SS2: A exclusão do conceito de Existência da classe dos conceitos primitivos de \mathcal{G} .

SS3: A proibição de proposições da forma $(\forall x) \mathfrak{F}(x)$ poderem ocorrer na posição de argumentos das funções do cálculo proposicional.

Na Teoria do Sentido associada com \mathcal{G} prescrevem-se as condições seguintes:

i) O sentido de uma expressão da forma $(\exists x) \mathfrak{F}(x)$ é analisado em termos de uma *asserção parcial* (ou de uma abreviatura) de uma construção efectiva.⁴

ii) O sentido de $\neg(\forall x) \mathfrak{F}(x)$, por exemplo, é analisado como uma asserção que visa implicar a existência (no sentido de **SS2**) de um contra-exemplo.

iii) A proibição SS3 resulta do facto de as funções do cálculo proposicional serem definidas por meio de tabelas de verdade, as quais não se aplicam a proposições da forma $(\forall x) \mathfrak{F}(x)$.

A política a seguir sobre definições consiste em estipular que se o termo *definiendum* for eliminável em todos os contextos então é permitida a definição de novos símbolos num sistema construtivo *stricto sensu*.

⁴ Cf. HILBERT, D. & BERNAYS, P. [1968], *Grundlagen der Mathematik I* (2. ed.). Berlin: Springer Verlag; onde para a caracterização de um sistema como finitista o termo “asserção parcial” é pela primeira vez introduzido. A notação aqui usada é a de H.B..

Nestas condições, o sistema de lógica intuicionista de Heyting⁵, em que a *existência* é um conceito primitivo e as funções do cálculo proposicional são aplicadas livremente, não é construtivo *stricto sensu*, uma vez que viola SS2 e SS3.

§5

Descrição Estrutural do Sistema construtivo *stricto sensu* \mathfrak{S}

A descrição estrutural de um sistema construtivo *stricto sensu* é a seguinte:

i) As fórmulas do sistema estão em Forma Normal Prenexa, em particular em Forma Normal de Skolem,

$$(\exists \mathfrak{x}_i) (\forall \eta_i) \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_i, \eta_i).$$

ii) Assim as fórmulas atômicas que se seguem ao prefixo não contêm ocorrências de quantificadores.

iii) Na constituição interna das fórmulas atômicas actuam:

- As relações, como =, \supset , etc.
- As funções, como +, \times , etc.
- As constantes, como 1, 2, etc.
- As variáveis \mathfrak{x} , η , \mathfrak{z} , \mathfrak{w} , etc.

iv) Um termo é a expressão que resulta de uma ou mais aplicações de funções a constantes ou variáveis.

v) Por SS1 qualquer expressão atômica é decidível.

⁵ HEYTING, A. [1930], "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik", *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, physikalisch-mathematische Klasse, Berlin; pp. 42-56.

vi) As funções do cálculo proposicional, entendidas no sentido das tabelas de verdade, constituem um subconjunto das funções computáveis, e os seus argumentos e valores são os dois valores de verdade V, F.

Se estas e outras funções computáveis são aplicadas por uma ordem fixa a objectos arbitrários x_1, x_2, \dots o resultado é sempre o valor de verdade V, independentemente da identidade dos objectos.

vii) Axiomas e Regras de Inferência:

1. Além de axiomas específicos que dependem da identidade dos objectos primitivos, têm-se todos os axiomas do cálculo proposicional bivalente aplicados a fórmulas atómicas.

2. Generalização Existencial:

Se $\mathfrak{F}(t)$ é uma fórmula bem formada do sistema, em que \mathfrak{F} contém um termo constante t , então pode-se inferir $(\exists x) \mathfrak{F}(x)$. Este processo é generalizável.

[N. B.: É importante reconhecer que esta regra não constitui uma definição em que $(\exists x) \mathfrak{F}(x)$ é o termo *definiendum*.

A regra apenas estipula como uma proposição com uma ocorrência deste símbolo *actua numa demonstração*, i.e., a partir de que premissas pode ser inferida e a que inferências dá lugar. Definições deste género têm que satisfazer uma *cláusula de eliminabilidade*, com o seguinte conteúdo: uma proposição em que o termo *definiendum* não ocorre mas que é demonstrável recorrendo a ele, também tem que ser demonstrável sem o seu recurso.]

§6

Hierarquia de Modelos para \mathfrak{G}

Se se deixar a caracterização estrutural de \mathcal{G} especificando objectos primitivos, relações e funções primitivas, obtém-se uma hierarquia de modelos construtivos *stricto sensu* para \mathcal{G} .

Na base da hierarquia está a Teoria Recursiva dos Números, em que os objectos primitivos são os elementos de \mathbb{N} e as relações e funções são definidas por recursão ou por indução completa.

Como neste nível não se consegue demonstrar a Consistência da Aritmética Clássica, G. Gentzen propôs uma extensão em que:

i) Os inteiros não são ordenados pela ordem (crescente) usual mas antes por uma outra relação R^* , também uma Boa Ordem, e

ii) Em que se permite a definição recursiva de uma função $f(n)$ em \mathbb{N} em termos de $f(\pi(n))$, em que $\pi(n)$ denota o predecessor de n na Boa Ordem. Pela definição de R^* qualquer subconjunto tem um R^* -1º elemento e por isso $f(n)$ é computável num número finito de passos.

Para a caracterização da construtividade *stricto sensu* esta extensão, neste nível, não é atraente, uma vez que para mostrar que R^* é uma Boa Ordem se tem que recorrer eventualmente a argumentos da Teoria dos Conjuntos.

No nível seguinte está a extensão proposta por Gödel, a qual consiste fundamentalmente numa expansão da ontologia, no sentido em que além dos inteiros e das funções de inteiros se introduz agora *funções de funções de inteiros*. Estas funções, na literatura designadas por *funcionais*, são funções cujos *argumentos e valores* são funções.

Assim se f e h são funções e $n \in \mathbb{N}$, um funcional F é uma função $F(f) = h$, definida como sendo a função h cujo valor num argumento $x \in \mathbb{N}$ é calculado executando n vezes a função f . Assim

$$h(x) = f^n, \dots, (f^n(f(x)))$$

e

$$F(f)(x) = f^n, \dots, (f^2(f(x))).$$

Assim por exemplo se $n=2$ diz-se que o funcional F eleva f ao quadrado e que F é uma função do segundo tipo.⁶

De acordo com o ponto de vista construtivo *stricto sensu* estes funcionais têm que satisfazer SS1 e os tipos a que dão origem têm que ser finitos. Ambas as características são captadas na expressão *funcional computável de tipo finito*, por meio da qual a extensão de Gödel passou a ser conhecida.

§7

Esquemas de Definição e Axiomas para \mathfrak{G}

Para continuar com o sistema \mathfrak{G} , já esboçado acima, a introdução de funcionais em \mathfrak{G} tem que ser regulada. Duas regras provenientes do Teoria Recursiva dos Números podem ser adaptadas:

1. A Definição Explícita (*generalização do exemplo acima*).

Um funcional F pode ser definido pela cláusula:

$$F(x_1), \dots, (x_n)$$

significa que F actua sobre x_1 , o resultado obtido, por sua vez, actua sobre x_2 , ... e no final tem-se um termo \mathfrak{T} , cujos elementos constituintes são as variáveis x_1, \dots, x_n , as funções previamente definidas.

2. A Definição Recursiva.

⁶ KLEENE, S. [1964], *Introduction to Metamathematics*. Amsterdam: North-Holland Publishing.

Uma função $\mathfrak{F}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, cujos argumentos são inteiros e cujos valores podem ser funções de qualquer tipo pode ser definida pelas equações:

$$\mathfrak{F}(0) = \mathfrak{T}_1$$

$$\mathfrak{F}(r+1) = \mathfrak{T}_2(r, \mathfrak{F}(r)).$$

[N.B.: Antes de passar à descrição final dos Axiomas e Regras para \mathcal{G} é importante reparar que o domínio de objectos foi expandido com a inclusão dos funcionais computáveis, como \mathfrak{F} no exemplo acima. De modo que se tem também uma *nova operação primitiva*⁷, justamente a *aplicação de um funcional a um objecto do tipo apropriado*. Como faz parte do *sentido* do conceito de funcional computável que a operação possa ser sempre executada, tem-se que um termo que resulta da aplicação de um funcional a um objecto de tipo apropriado é ele próprio computável.]

Assim para o sistema \mathcal{G} , com estes dois esquemas de definição e funções de tipo arbitrariamente alto, contam-se como axiomas:

1. Os axiomas do cálculo proposicional (para proposições decidíveis);
2. A Indução Completa;
3. Substituição I (*Lei de Leibniz*), regula a substituibilidade de (termos) iguais por iguais;
4. Substituição II: (*Dictum de Omni*), regula a inserção de objectos numa proposição universal;
5. Generalização Existencial, a ser introduzida como já foi descrito acima.

⁷ Não está mencionada na descrição do §5.

Nestes termos uma proposição de \mathcal{G} com sentido é uma asserção em Forma Normal Prenexa segundo a qual existem objectos f_i (de tipos especificados) tais que para todos os objectos g_i (de tipos especificados) $\mathfrak{F}(f_i, g_i)$ é verdadeira, i.e.,

$$(\exists f_i) (\forall g_i) \mathfrak{F}(f_i, g_i).$$

§8

Equivalência Intensional na Interpretação do Cálculo Proposicional em \mathcal{G}

Proseguindo agora o *desideratum* do final do §3, vamos considerar a interpretação da lógica intuicionista em \mathcal{G} , considerando de momento o Cálculo Proposicional.

A *Grundannahme* (hipótese de fundo) é evidentemente que as relações e as funções primitivas da Teoria dos Números intuicionista são decidíveis, respectivamente computáveis.

Essencialmente o processo de interpretação consiste em mostrar:

i) Que o *sentido* das operações do cálculo proposicional e do cálculo de predicados pode ser captado por \mathcal{G} , de tal modo que se os seus argumentos são proposições de \mathcal{G} os seus valores também o são e

ii) Que os axiomas e as regras da lógica intuicionista são demonstráveis em \mathcal{G} como teoremas.

Para a interpretação funcional das operações do cálculo proposicional intuicionista Gödel considera proposições com um prefixo simples (e não múltiplo) em Forma Normal de Skolem.

[(Ver a discussão da implicação intuicionista no §3.) É inevitável comparar o tratamento das operações lógicas com (Gödel) *1958.]

I. A Negação.

A negação de \mathfrak{A} , $\neg \mathfrak{A}$, pode ser definida em termos da implicação

$$\neg \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \rightarrow (0=1).$$

II. A Implicação.

Se

$$\mathfrak{A} = (\exists x) (\forall \eta) \mathfrak{R}(x, \eta)$$

e

$$\mathfrak{B} = (\exists m) (\forall n) \mathfrak{S}(m, n)$$

e ambas são fórmulas bem formadas de \mathfrak{G} , o nosso problema consiste em encontrar uma expressão de \mathfrak{G} que transmita o *sentido* da implicação:

$$(\Phi) \quad (\exists x) (\forall \eta) \mathfrak{R}(x, \eta) \rightarrow (\exists m) (\forall n) \mathfrak{S}(m, n).$$

Pelos §§7 e 5 temos assim que encontrar uma fórmula do padrão:

$$(\exists f_i) (\forall g_i) \mathfrak{F}(f_i, g_i)$$

a qual seja intensionalmente equivalente à implicação (Φ) .

A análise do *sentido* de (Φ) revela-nos que, com a sua asserção, se pretende exprimir

a condição segundo a qual:

se existe um exemplo x que satisfaz uma relação R ,

então também existe um exemplo m que satisfaz uma relação S .

Mas pelo §4-*i*) o sentido desta condição é o de que se dispõe de um processo f , o qual a partir de x permite calcular o m , de modo que o conteúdo intensional da nossa implicação é de facto melhor expresso por uma fórmula como:

$$(\Phi\Phi) \quad (\exists f) (\forall x) [(\forall y) R(x, y) \rightarrow (\forall n) S(f(x), n)].$$

Ora, por §5-*ii*), a fórmula entre parêntesis rectos não é uma fórmula de \mathcal{G} . Mas de novo a análise do sentido da implicação:

$$(\forall y) R(x, y) \rightarrow (\forall n) S(f(x), n)$$

revela que uma refutação do conseqüente, por meio de um *contra-exemplo*, permite calcular um *contra-exemplo* para refutar o antecedente.

Assim se g for a função por meio da qual se calcula o contra exemplo para S , então a fórmula entre parêntesis rectos é analisável como:

$$(\exists g) (\forall n) [\sim S(f(x), n) \rightarrow \sim R(x, g(n))].$$

Mas como a implicação agora ocorre entre fórmulas sem quantificação, ela pode ser substituída pela implicação da lógica bivalente. Para a nova fórmula a contraposição e a lei da negação dupla são validamente aplicáveis e obtém-se assim a fórmula de \mathcal{G}

$$(\exists g) (\forall n) [\mathfrak{R}(x, g(n)) \rightarrow \mathfrak{S}(f(x), n)].$$

A reunião desta fórmula com $(\Phi\Phi)$ resulta em:

$$(\exists f) (\forall x) (\exists g) (\forall n) [\mathfrak{R}(x, g(n)) \rightarrow \mathfrak{S}(f(x), n)].$$

Como o n depende de x , g é representável como a função binária $g(x, n)$ e a fórmula de \mathcal{G} é finalmente:

$$(\exists f) (\exists g) (\forall x) (\forall n) [\mathfrak{A}(x, g(x, n)) \rightarrow \mathfrak{S}(f(x), n)].$$

[N.B.: É importante reparar que o tipo das variáveis funcionais se eleva, em relação ao tipo das expressões de saída, uma vez que os argumentos e os valores em $f(x)$ e em $g(x, n)$ têm o tipo das variáveis em $\mathfrak{A}(x, \eta)$ e $\mathfrak{S}(m, n)$. Logo f e g têm um tipo mais elevado.]

III. A Conjunção.

A interpretação da conjunção consiste apenas em reunir as expressões \mathfrak{A} e \mathfrak{S} com os quantificadores em forma normal de Skolem e tem-se assim:

$$(\exists x) (\exists m) (\forall \eta) [\mathfrak{A}(x, \eta) \wedge \mathfrak{S}(m, \eta)].$$

IV. A Disjunção.

Em 1941 Gödel pensou que o mesmo se podia fazer para a disjunção, mas em 1958 restringiu esta possibilidade apenas ao caso em que as fórmulas atômicas não têm quantificação. De outro modo supondo t um termo de tipo 0 tem-se:

$$(\exists x) (\exists m) (\exists t) (\forall \eta) (\forall n) \{[t = 0 \wedge \mathfrak{A}(x, \eta)] \vee [t = 1 \wedge \mathfrak{S}(m, \eta)]\}.$$

§9

O Axioma da Escolha na Interpretação dos Quantificadores

Para a interpretação dos quantificadores podemos começar por considerar uma expressão $\mathfrak{A}(f)$ na qual ocorre uma constante f .

i) Prefixar o quantificador existencial a $\mathfrak{A}(f)$ resulta de novo numa expressão de \mathfrak{S} ,

$$(\exists w) (\exists r) (\forall \eta) \mathfrak{R}(w, r, \eta).$$

ii) O mesmo tratamento não se pode aplicar directamente ao quantificador universal.

Supondo de novo que $\mathfrak{R}(\xi)$ é a expressão

$$(\exists r) (\forall \eta) \mathfrak{R}(\xi, r, \eta)$$

o prefixo do quantificador universal daria a fórmula

$$(*) \quad (\forall w) (\exists r) (\forall \eta) \mathfrak{R}(w, r, \eta)$$

a qual não está em Forma Normal de Skolem.

No entanto, do ponto de vista intuicionista, o *sentido* de uma fórmula

$$(\forall x) (\exists y) A(x, y)$$

visa sempre implicar, pelo Axioma da Escolha, uma asserção com a forma

$$(\exists f) (\forall x) A(x, f(x)).$$

Assim a fórmula (*) tem a reformulação

$$(\exists f) (\forall w) (\forall \eta) \mathfrak{R}(w, f(w), \eta),$$

a qual é uma fórmula de \mathfrak{G} e está em Forma Normal de Skolem.

§10

Um equivalente clássico do *Tertium non Datur* e *Modus Ponens* em \mathfrak{G}

Dada a complexidade das fórmulas, a realização em detalhe de todo o trabalho do §8-ii) a seguir exemplificada em dois exemplos simples, um equivalente clássico do *tertium non datur*⁸, a Reflexividade da Implicação e *Modus Ponens*.

I. Reflexividade da Implicação.

Para a Reflexividade da Implicação as nossas hipóteses são que \mathfrak{A} é uma fórmula de \mathfrak{G} e que uma implicação $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ é definida como em §8:

$$(\exists f) (\exists g) (\forall x) (\forall n) [\mathfrak{R}(x, g(x, n)) \rightarrow \mathfrak{S}(f(x), n)].$$

Para provar que $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ é um teorema de \mathfrak{G} basta reparar que se $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, então $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$ e as funções f e g são computáveis por §7.1 com os valores:

$$f(x) = x \text{ e } g(x, n) = n.$$

II. *Modus Ponens*.

As nossas hipóteses são:

$$\mathfrak{G} \vdash (\exists x) (\forall \eta) \mathfrak{R}(x, \eta)$$

e

$$\mathfrak{G} \vdash (\exists f) (\exists g) (\forall x) (\forall n) [\mathfrak{R}(x, g(x, n)) \rightarrow \mathfrak{S}(f(x), n)]$$

e pretendemos derivar

$$(\exists m) (\forall n) \mathfrak{S}(m, n).$$

⁸ Nem o *tertium non datur* nem outro equivalente clássico conhecido, a negação dupla sob a forma $\neg\neg X \rightarrow X$, podem ser demonstrados em \mathfrak{G} . É claro que a equivalência funcional entre o *tertium non datur* e a Reflexividade da Implicação não tem qualquer significado intuicionístico.

1. Pela interpretação em \mathcal{G} do quantificador existencial aplicada à primeira hipótese, estamos em condições de obter um termo explícito t tal que:

$$(\forall \eta) \mathfrak{R}(t, \eta).$$

2. Da segunda hipótese sabemos que se podem definir funções f_2 e f_1 , tais que:

$$(\forall x) (\forall n) [\mathfrak{R}(x, f_2(x, n)) \rightarrow \mathfrak{S}(f_1(x), n)].$$

3. Da fórmula 2., por *Dictum de Omni* obtém-se:

$$(\forall n) [\mathfrak{R}(t, f_2(t, n)) \rightarrow \mathfrak{S}(f_1(t), n)].$$

4. Da fórmula 1., de novo por *Dictum de Omni* obtém-se:

$$(\forall n) [\mathfrak{R}(t, f_2(t, n))].$$

5. Pela Regra de *Modus Ponens* da lógica bivalente tem-se:

$$(\forall n) \mathfrak{S}(f_1(t), n).$$

6. Logo pela discussão da Generalização Existencial no §5:

$$(\exists m) (\forall n) \mathfrak{S}(m, n),$$

como se pretendia .

§11

Uma 2.^a demonstração da Consistência da Teoria Clássica dos Números

Da redução da lógica intuicionista ao sistema \mathcal{G} seguem-se consequências importantes.

Se E é uma expressão complexa, composta por fórmulas de \mathcal{G} por meio das operações lógicas já definidas, o *sentido* de E foi, pela interpretação funcional proposta,

identificado com uma fórmula \mathcal{E} de \mathcal{G} . Pela redução acabada de executar, segue-se agora que se E é intuicionisticamente demonstrável então \mathcal{E} tem uma demonstração em \mathcal{G} , *caso em que a demonstração intuicionista de E é construtiva stricto sensu*.

Em particular, se se tem uma demonstração intuicionista de uma asserção existencial $(\exists x) F(x)$, então a correspondente fórmula de \mathcal{G} , $(\exists x) \mathfrak{F}(x)$ é um teorema de \mathcal{G} . Pela interpretação da quantificação existencial em \mathcal{G} esta demonstração permite encontrar um termo explícito tal que $\mathfrak{F}(t)$.

Assim a demonstração intuicionista *via redução funcional* permite sempre encontrar o termo.

Ora sucede que, como se disse no §3, a lógica clássica está contida na lógica intuicionista, exceptuado o uso de definições impredicativas. Como na Teoria Clássica dos Números não se recorre ao uso de definições impredicativas, a consistência da teoria clássica pode ser assim reduzida à consistência de \mathcal{G} .

Também pelo argumento do §2, se a disjunção e a quantificação existencial forem eliminadas, qualquer demonstração classicamente correcta é correcta intuicionisticamente. Assim uma contradição obtida por meio de um argumento clássico seria também uma contradição na lógica intuicionista, o que implicaria a inconsistência de \mathcal{G} .

Na nota *h*) de 1972 Gödel não deixa de reparar que no sistema T de 1958 o Princípio de Markov é demonstrável. E como o sistema \mathcal{G} , usado em 1941, difere do sistema T por ter as fórmulas em Forma Normal de Skolem, enquanto que as fórmulas de T não têm sequer quantificação, *uma variante* desse princípio é igualmente acessível em \mathcal{G} .

Segundo o Princípio de Markov, se F for uma propriedade aritmética decidível, então

$$\neg(\forall x) F(x) \rightarrow (\exists x) \neg F(x).$$

Este Princípio, aceite pela escola construtivista russa, tem sido rejeitado pelos intuicionistas, pelo menos desde 1956, como se vê pelo argumento de Heyting nas pgs. 103 e 104 do seu *Intuitionism: An Introduction*. O que se prova a respeito de \mathcal{G} é que uma demonstração clássica de existência, $(\exists x) F(x)$, pode ser transformada numa construção. O argumento é o seguinte.

Se F é uma propriedade aritmética decidível, então F não tem quantificadores e a fórmula $(\exists x) F(x)$ é equivalente à fórmula $\neg(\forall x) \neg F(x)$. Ora esta fórmula satisfaz as condições do §2. Logo se é classicamente demonstrável então também o é intuicionisticamente. Mas pelo §4, uma demonstração intuicionista de existência permite encontrar em \mathcal{G} a construção correspondente.

Literatura

DUMMETT, M. [1977], *Elements of Intuitionism*, Oxford: Oxford University Press.

FEFERMAN, S. [1964], "Foundations of Predicative Analysis", *Journal of Symbolic Logic*, 29.

GÖDEL, K. [1986-2003], *Collected Works*; S. Feferman (editor-in-chief). New York: Oxford University Press. Volumes I-V.

GÖDEL, K. [no prelo], *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*; ed. M.S. Lourenço, 2.^a edição. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

HEYTING, A. [1956], *Intuitionism: An Introduction*. Amsterdam: North-Holland.

HILBERT, D., & BERNAYS, P. [1968], *Die Grundlagen der Mathematik*, 2.^a ed. Berlin: Springer-Verlag.

KLEENE, S. C. [1964], *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam: North-Holland.

WANG, H. [1987], *Reflections on Gödel*. Cambridge (US), London: MIT Press.