

NOTAS ACRESCENTADAS EM 1972

a

[Do texto 1958¹ ao presente texto]

Este texto não é uma tradução literal do trabalho publicado originalmente em alemão, em *Dialectica* (1958). Ao rever a tradução de Leo Boron, rephraseei muitas passagens. Mas em nenhum ponto modifiquei substancialmente o sentido. Corrigi algumas incorrecções menores e juntei uma série de notas, que designo pelas letras **(a)**-**(n)**. Quero exprimir os meus agradecimentos ao Professor Dana Scott pela supervisão, enquanto estive doente, do texto dactilográfico deste e do trabalho que se lhe segue, ao Professor Paul Bernays pela correcção das provas tipográficas e por ter chamado a minha atenção para algumas ideias menos correctas no meu manuscrito.

b

[Sobre a nota 2]

“Intuição concreta”, “concretamente intuitivo” são expressões usadas para traduzir “Anschauung”, “anschaulich”. Os termos simples “concreto” ou “intuitivo” são usados neste texto com este sentido. O sentido que Hilbert dá a “Anschauung” é substancialmente a intuição espaço-temporal de Kant, restrita, todavia, a um número finito de objectos discretos. Repare-se que é a insistência de Hilbert em conhecimento *concreto* que torna a matemática finitista tão surpreendentemente fraca, e exclui muitas coisas que nos são a todos tão incontrovertentemente evidentes, como a teoria dos

¹ GÖDEL, K. [1958] “Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes”: *Dialectica* **12**, pgs. 280-287.

números finitista. E.g., enquanto que qualquer definição recursiva primitiva é finitista, o princípio geral da definição recursiva primitiva não é uma proposição finitista, uma vez que contém o conceito abstracto de função. Nada existe no termo “finitista” que sugira uma restrição a conhecimento concreto. É só a interpretação especial que Hilbert dá a este termo que introduz a restrição.

C

[Sobre a acessibilidade de Ackermann]

Acessibilidade e alguns outros conceitos intimamente relacionados (em combinação com a lógica intuicionista) têm sido usados, na maioria dos casos, em demonstrações de consistência (ver: 1. *Gentzen 1936*, pgs. 555, 558; 2. *Lorenzen 1951*, pg. 99, em particular a sua “indução de segunda espécie”; 3. *Schütte 1954*, pg. 31; 4. *Kreisel 1965*, pg. 137, 1967, pg. 246 e 1968, pg. 351, §12; 5. *Takeuti 1957, 1960, 1967*.) Estes conceitos criam a impressão ilusória de serem baseados na *intuição concreta* de certos *processos infinitos*, tais como “contar para lá de ω ” ou “percorrer” os ordinais menores do que um ordinal α . Possuímos de facto uma tal intuição, mas o seu alcance não vai muito longe na sucessão dos ordinais, certamente não vai mais longe do que o finitismo. Para tornar *frutuoso* o conceito de acessibilidade, *concepções abstractas* são sempre necessárias, e.g., na definição original de Gentzen, percepções certas acerca de um número infinito de percepções possíveis, o que é bastante diferente do que foi mencionado acima (ver o seu trabalho 1936, pg. 555, linha 7). Pode-se conseguir uma maior aproximação do finitismo de Hilbert com o uso do conceito de sucessão de escolha livre, em vez do conceito de “acessibilidade”.^d

d

[Sobre a nota c]

Na verdade isto é um princípio abstracto sobre esquemas de ramificação, o qual é afirmado e demonstrado por Brouwer e Heyting apenas para o caso em que os seus elementos sejam inteiros (todavia não é claro que este facto seja substancialmente

usado na demonstração). C. Spector no seu trabalho 1962 mostrou que o princípio abstracto implica a consistência da análise clássica, enquanto que o princípio de Brouwer produz apenas a consistência de um certo subsistema desta. Infelizmente para nenhum dos dois princípios, contudo, é conhecida uma demonstração construtivista (excepto que, de acordo com Kreisel (1965, pg. 143) pode-se demonstrar que o princípio mais fraco é relativamente consistente com os outros axiomas intuicionistas aceites). Foi Kreisel quem primeiro sugeriu o uso deste princípio para demonstrações de consistência.

Talvez a extensão mais promissora do sistema T seja a que é obtida pela introdução de *funções computáveis de tipo mais alto sobre ordinais construtivos*.

e

[Reflexão sobre o *sentido*]

Um exemplo é o conceito “ p implica q ” no sentido de: “A partir de uma demonstração convincente de p , pode-se obter uma demonstração convincente de q ”.

f

[Sobre a nota 4]

Não se pode objectar à versão dada por *Kreisel 1965*, pgs. 168-173, 177-178. O Teorema 3.43 na página 172 destas aulas afirma que ε_0 é o limite deste processo. Kreisel pretende concluir deste facto que ε_0 é o limite exacto da idealização da intuição concreta. Mas os seus argumentos teriam que ser mais trabalhados para serem completamente convincentes. Repare-se que a hierarquia de Kreisel pode ter uma extensão para lá de ε_0 , contando como um passo qualquer sucessão de passos que já se tenha demonstrado ser admissível (e.g., qualquer sucessão de ε_0 passos). Esta extensão fornece um processo de tornar construtivo o muito usado conceito de acessibilidade (ver a nota c acima) num sentido muito mais estrito, ao decompor o conceito geral e impredicativo de demonstração intuicionista em níveis já construídos de demonstrações formais.

g

[Sobre a nota 5]

Vê-se facilmente que as funções de Turing (em que funções enquanto argumentos ou valores de funções de tipo mais alto se têm que identificar com os números de código das suas máquinas) e certas das suas subclasses também satisfazem os axiomas e as regras do sistema T, descrito a seguir. Para uma interpretação do significado deste facto ver a nota **h**.

h

[Sobre a nota g]

Um desenvolvimento desta ideia conduziria ao seguinte:

1. Um conceito *menos amplo* de demonstração, ao qual se pode chamar “demonstração redutiva” e que, *grosso modo*, é definido pelo facto de que, incluindo certas suplementações triviais, a cadeia de definições dos conceitos que ocorrem no teorema, juntamente com certos axiomas sobre os termos primitivos, constitui ela própria uma demonstração, i.e., uma cadeia contínua de evidências imediatas. Em aplicações especiais (como, e.g., no nosso caso) este conceito de demonstração pode-se tornar preciso especificando as suplementações, os axiomas e as evidências a serem usadas.

Repare-se que, neste contexto, uma definição tem que ser considerada como um teorema que afirma a existência e a univocidade de um objecto que satisfaz certas condições e que, no nosso caso, é conveniente que uma proposição sobre as características do tipo da função a ser definida faça parte da sua definição.

2. Um conceito mais especial de “computável de tipo *t*”, obtido pela substituição, na definição dada acima, do conceito de “construtivamente evidente ou demonstrável” (que ocorre nela quer explícita quer implicitamente, através de implicações da forma: *Se x, y, ..., têm certos tipos então ...*) pelo conceito de “demonstrável redutivamente”. Repare-se que devido ao facto de “demonstrável

reduzivelmente” ser uma propriedade decidível, as implicações que ocorrem podem ser interpretadas como funções de valores de verdade.

3. É um facto que se os axiomas, as regras e os conceitos primitivos de T (repare-se, e.g., que cada tipo é um conceito primitivo de T) são substituídos, à custa das definições 1, 2 dadas acima, por evidências e conceitos realmente primitivos (ou, pelo menos, por qualquer coisa perto de conceitos realmente primitivos) obtendo-se assim um sistema T' , então apenas o conceito incomparavelmente mais restrito (em comparação com o de Heyting) de demonstração *reduzível* necessita de ser usado em proposições e demonstrações de T' e que, além disso, como estas demonstrações são determinadas univocamente pelos teoremas, pode-se evitar a quantificação sobre “qualquer demonstração”. Repare-se que *não* se pretende afirmar que as demonstrações em T' são reduzíveis. Só em certos casos isso é verdade, em particular nas demonstrações dos axiomas de T e nos casos individuais das regras de T (não trivialmente para as dos grupos (4) e (5), trivialmente para as outras). O que se pretende afirmar é apenas que nenhum outro *conceito* de demonstração, além do de demonstração reduzível, *ocorre nas* proposições e demonstrações de T' , excepto, claro, na medida em que no intuicionismo o sentido de qualquer teorema P é: Fez-se uma *demonstração* de P. O mesmo método para evitar o uso da lógica de Heyting, ou o conceito geral de demonstração, devia ser substancialmente aplicável a T, quando este sistema é interpretado em termos de funções de Turing (ver nota (g)).

O item 3 mostra que a interpretação da lógica intuicionista, em termos de funções computáveis, de modo algum pressupõe a lógica de Heyting e que, além disso, é construtiva e evidente num grau mais elevado do que a de Heyting. O que torna T mais construtivo e de maior evidência é exactamente a eliminação de generalidades tão vastas como “qualquer demonstração”.

O grau mais elevado de construtividade também se revela noutros factos, e.g., que o princípio de Markov $\neg(x)\phi(x) \supset (\exists x)\neg\phi(x)$ (ver Kleene 1960, pg. 157, nota de rodapé) é trivialmente demonstrável para qualquer ϕ recursivo primitivo e que, num contexto mais geral, para qualquer propriedade decidível ϕ e quaisquer objectos x . A propósito, isto aumenta o interesse desta interpretação da lógica intuicionista (quer em

termos de funções computáveis, quer em funções de Turing) e este interesse mantém-se mesmo que a lógica de Heyting *seja* pressuposta.

i

[Para a descrição de T]

Para uma descrição precisa de T deve-se acrescentar o seguinte:

Os símbolos primitivos de T são: 0, +1, =, *variáveis* e *constantes definidas* de qualquer tipo finito, “*aplicação*” de funções a argumentos de tipos adequados (denotados por $(.,.,.)$), e *conectivas proposicionais*. Os *termos* constroem-se apenas a partir de constantes, variáveis e aplicação. *Fórmulas com sentido* são funções com valor de verdade de equações entre termos do mesmo tipo.

Acerca dos axiomas de T repare-se no seguinte:

1. A versão da *indução completa* usada na demonstração de consistência é esta:

$$A(0, x), A(s, F(s, x)) \supset A(s+1, x) \vdash A(s, x)$$

em que x é uma sucessão finita de variáveis de tipos arbitrários e F é uma sucessão de funções previamente definidas de tipos adequados (acerca da notação usada aqui ver a próxima pg. 278).

2. Para que as demonstrações dos Axiomas 1 e 4 de H e para que a Regra da Dedução 6 de H sejam satisfeitas na interpretação ‘ definida a seguir, é necessário o princípio da *definição disjuntiva* com a seguinte forma:

Uma função f pode ser definida estipulando que

$$A \supset f(x) = t_1, \neg A \supset f(x) = t_2,$$

em que t_1, t_2 são termos e A é uma função com valor de verdade de equações entre *termos numéricos*, em que ambos contêm apenas funções previamente definidas e nenhuma variáveis, excepto as da sucessão x .

3. A versão da indução completa mencionada em 1. e as definições disjuntivas mencionadas em 2. podem ser derivadas em T, estas últimas por meio de funções disjuntivas H definidas recursivamente do seguinte modo:

$$H(0, f, g) = f, H(n + 1, f, g) = g.$$

Todavia parece preferível primeiro formular axiomas dos quais a demonstração de consistência seja imediata e depois reduzi-los a axiomas mais simples: o que também aumenta consideravelmente a simplicidade da demonstração de consistência é também o facto de que evitamos a igualdade extensional, a qual é um conceito incomparavelmente mais complexo do que a identidade lógica.

4. Se nenhuma atenção é dada à complexidade da demonstração de consistência, então todo o cálculo de proposições em T pode ser dispensado. As razões são 1. enquanto aplicado a equações numéricas este cálculo pode ser substituído por ideias puramente aritméticas, 2. enquanto aplicado a equações de tipo mais alto ele pode ser perfeitamente omitido se (a) o segundo axioma da igualdade (grupo (2)) é formulado como uma regra de inferência (o que, a propósito, é usado apenas para a substituição recíproca do definiens e do definiendum) e (b) se introduz uma regra de inferência disjuntiva, segundo a qual se A se segue de $t = 0$ e de $N(t) = 0$ (em que N é definido por: $N(0) = 1$, $N(x + 1) = 0$) por meio dos outros axiomas e regras, excepto a regra de substituição para as variáveis de t , então tem-se a asserção de A .

5. É um facto curioso que o grupo (3) de axiomas é supérfluo devido à definibilidade recursiva de uma função δ pelas equações $\delta(0) = 0$, $\delta(x + 1) = x$ e devido também à definibilidade de $\neg p$ por $p \supset . 1 = 0$. E isto porque se segue imediatamente que: $x + 1 = y + 1 . \supset . \delta(x + 1) = \delta(y + 1) . \supset . x = y$ e $x + 1 = 0 . \supset . \delta(x + 1) = \delta(0) . \supset . x = 0 . \supset . 1 = 0$; por outro lado, $\neg(1 = 0)$ pela definição de \neg .

j

[Sobre a nota 10]

Para uma descrição completa do sistema H usado neste ensaio deve ser acrescentado o seguinte: *as funções da teoria dos números são definidas apenas por recursão primitiva e por fazer os valores de uma função serem iguais aos de um termo composto por variáveis e por funções previamente definidas. As fórmulas são o resultado obtido de equações entre os termos pela aplicação (iterada) das conectivas proposicionais e dos quantificadores.* Não se usam “*Sequenzen*” no sentido de Gentzen nem o *operador de descrições* ι_x . A *indução completa* é formulada como uma regra de

inferência. Os axiomas da igualdade são: $x = x$ e $x = y . \supset . t(x) = t(y)$ para qualquer termo $t(x)$. Além dos axiomas mencionados na nota 10 e nesta nota, dos *axiomas de Peano* apenas se recorre ao *terceiro e quarto*. É evidente que os sistemas T e H parcialmente coincidem.

k

[Sobre a relação de denotação]

Peço que a partir daqui o leitor dê atenção ao facto de que as letras e as fórmulas que ocorrem nas discussões subsequentes *não são*, mas antes *denotam*, combinações de símbolos de T ou de H; ou fórmulas como “ $(\exists x)$ ” ou “ $x(y)$ ” denotam *operações* a serem efectuadas sobre combinações de símbolos cujos valores são outras combinações de símbolos. Esta relação de denotação pode facilmente ser tornada precisa. Em particular repare-se que em expressões como $A(\alpha, \beta, \gamma)$ os parêntesis denotam uma *operação de substituição*, i.e., “ $A(\alpha, \beta, \gamma)$ ” tem que ser considerado como uma abreviatura de “ $\text{Subst} \left(A \begin{matrix} y, z, x \\ \alpha, \beta, \gamma \end{matrix} \right)$ ”. Assim $A(y, z, x) = A$.

l

[Sobre as definições em ‘]

A complexidade da definição de $(F \vee G)'$ é necessária a fim de assegurar a decidibilidade de \vee e desse modo a validade da inferência $p \supset r . q \supset r \vdash p \vee q . \supset r$. Se F e G não têm quantificadores então $(F \vee G)'$ pode ser definido do mesmo modo que $(F \wedge G)'$. Isto tem como consequência que se F não tem quantificadores então $F' = F$.

m

[Sobre o axioma 7]

Sem ameaçar a interpretabilidade da teoria clássica dos números na teoria intuicionista o Axioma 7 pode ser omitido (ver *Johansson 1936*). $0 = 1 \cdot \supset \neg p$ segue-se da definição de \neg e dos restantes axiomas e regras.

n

[Sobre as regras 4, 5, 7]

Repare-se além disso no seguinte: a demonstração da proposição é trivial para todos os axiomas de H e para a dedução da regra 2. A dedução das regras 1 e 3 segue-se facilmente do facto de que o que a fórmula $A(Q(x), z, x)$ (que corresponde a $(p \supset q)'$) diz é exactamente *que e como as funções Q para q' podem ser derivadas das funções Q para p'*. No que diz respeito à indução completa repare-se que a conclusão desta inferência para o caso do inteiro n é obtida das premissas pela aplicação n -ária de substituição e modus ponens. Repare-se também que o teorema da dedução pode ser facilmente demonstrado para a interpretação '. Além disso, como Spector observou (1962, pg. 10) o sistema T alargado com a inclusão da lógica intuicionista com quantificadores sobre funções de qualquer tipo finito (i.e., o sistema $\Sigma_2 - \{F\}$) pode ser interpretado em T exactamente da mesma maneira que a teoria intuicionista dos números. A demonstração é feita em detalhe no §9, pgs. 12-15 do trabalho de Spector.