

CAPÍTULO IV

A ARITMETIZAÇÃO DA METAMATEMÁTICA

SECÇÃO 1

O CONCEITO DE ARITMETIZAÇÃO

Até este ponto mantivemos separadas a Linguagem Z e a sua metalinguagem. Enquanto que na Linguagem Z são expressos e representados os factos da experiência aritmética por meio de fórmulas do sistema formal Z , na sua metalinguagem estas expressões formais são precisamente os objectos do raciocínio metalinguístico.

Se se reduzir todo o raciocínio matemático a uma linguagem formal M , então a metalinguagem de M , a linguagem por meio da qual falamos acerca das expressões de M , pode designar-se como a metamatemática de M .

No nosso caso a Linguagem M está reduzida ao seu fragmento aritmético, que é justamente a Linguagem Z . Assim, a Linguagem Z é um conjunto de asserções aritméticas e a sua metalinguagem um conjunto de asserções acerca daquelas. A ideia de Gödel foi a de unir a linguagem Z à sua metalinguagem, incorporando esta. Como a Linguagem Z é uma linguagem aritmética torna-se necessário que a sua metalinguagem também seja formulada numa linguagem aritmética. É este o conteúdo do conceito de aritmetização da metamatemática, o conceito por meio do qual a metalinguagem de uma Teoria Formal para a Aritmética se torna ela própria num conjunto de expressões aritméticas.

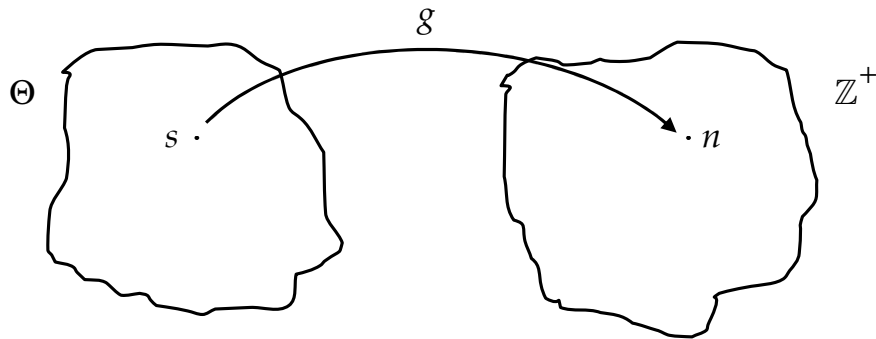
Domínio	Aritmética	Metamatemática da Aritmética	Aritmetização da Metamatemática
Linguagem	Z	M	M*
Conteúdo	Expressões acerca de números	Expressões acerca das expressões de Z	Números que representam as expressões de M

Assim, pelo processo da aritmetização da Metamatemática, estamos em condições de substituir proposições *acerca* do sistema formal Z por proposições aritméticas. Uma vez a substituição feita as novas proposições aritméticas podem ser expressas no sistema formal. Assim, a metamatemática do sistema formal passa a ser incorporada no sistema.

Para procedermos a este alargamento da linguagem Z temos que começar pela definição do conceito geral de aritmetização para uma Teoria de 1ª Ordem.

Definição 1. [*Aritmetização de uma Teoria de 1ª Ordem*]

Uma aritmetização de uma Teoria de 1ª Ordem Θ
é uma função 1-1,
a função g, cujo domínio é a união do conjunto dos símbolos,
das expressões e das sucessões finitas de expressões de Θ
e cujo contradomínio
é o conjunto dos inteiros positivos.



A função g tem que satisfazer as três condições seguintes:

- 1) Tem que ser efectivamente calculável;
- 2) Tem que existir um processo efectivo que determina se um certo inteiro positivo m está no seu contradomínio;
- 3) Se

$$m \in \mathbb{Z}^+$$

então o processo determina o objecto x tal que a imagem de x por g é m , i.e.,

$$g(x) = m.$$

É a esta correspondência por meio de g entre números inteiros e símbolos, expressões e sucessões de expressões de Θ que se dá o nome de aritmetização.

Para passarmos agora ao programa específico da aritmetização da Linguagem Z , torna-se necessário descrever primeiro o processo de aritmetização para uma teoria de 1ª ordem arbitrária Θ .

Definição 2. [Número de Gödel]

Seja Θ uma Teoria de 1ª Ordem e S um símbolo de Θ .

Então a notação

$$g(S)$$

representa o número de Gödel de S.

Definição 3. [*Gödelização dos Símbolos de Z*]

Os números de Gödel dos símbolos de uma Teoria de 1ª Ordem Θ

são calculados por meio das expressões seguintes:

1. $g(\mathbf{0}) = 1$

2. $g(\mathbf{N}) = 3$

3. $g(+)$ = 5

4. $g(\times)$ = 7

5. $g(=)$ = 9

6. $g(()$ = 11

7. $g())$ = 13

8. $g(,)$ = 15

9. $g(\neg)$ = 17

10. $g(\forall)$ = 19

11. $g(\rightarrow)$ = 21

12. $g(x_k)$ = $15 + 8 \cdot k$

$$[k = 1, 2, \dots]$$

13. $g(a_k)$ = $17 + 8 \cdot k$

$$[k = 1, 2, \dots]$$

14. $g(f_k^n)$ = $19 + 8 \cdot (2^n \cdot 3^k)$

$$[k \geq 1 \wedge n \geq 1]$$

$$15. \quad g \left(\alpha_k^n \right) = 21 + 8 \cdot (2^n \cdot 3^k)$$

$$[k \geq 1 \wedge n \geq 1]$$

Assim, símbolos diferentes têm números de Gödel diferentes e qualquer número de Gödel de um símbolo de Z é um número inteiro positivo ímpar.

Definição 4. [*Gödelização de uma Expressão de Z*]

Se

$$S_1, S_2, \dots, S_n$$

é uma sucessão de símbolos de Θ e assim uma expressão de Z ,
então o seu número de Gödel

$$g(S_1, S_2, \dots, S_n)$$

é dado pela equação

$$g(S_1, S_2, \dots, S_n) = 2^{g(S_1)} \cdot 3^{g(S_2)} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{g(S_n)}$$

em que p_i é o número primo de ordem i com $p_0 = 2$.

Exemplo 1.:

$$g(\neg(x_1 = 0)) =$$

$$= 2^{17} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15+8} \cdot 7^9 \cdot 11 \cdot 13^{13}.$$

Exemplo 2.:

$$2 + 2 = 4$$

A forma que esta equação tem é

$$+ (N (N (0)), N (N (0))) = N (N (N (N (0)))) .$$

O seu número de Gödel é:

$$\begin{aligned} & 2^5 \cdot 3^{11} \cdot 5^3 \cdot 7^{11} \cdot 11^3 \cdot 13^{11} \cdot 17 \cdot 19^{13} \cdot 23^{13} \cdot 29^{15} \cdot \\ & \cdot 31^3 \cdot 37^{11} \cdot 41^3 \cdot 43^{11} \cdot 47 \cdot 53^{13} \cdot 59^{13} \cdot 61^{13} \cdot 67^9 \cdot \\ & \cdot 71^3 \cdot 73^{11} \cdot 79^3 \cdot 83^{11} \cdot 89^3 \cdot 97^{11} \cdot 101^3 \cdot 103^{11} \cdot \\ & \cdot 107 \cdot 109^{13} \cdot 113^{13} \cdot 127^{13} \cdot 131^{13} . \end{aligned}$$

São **corolários** das definições apresentadas as proposições seguintes:

- 1) Expressões diferentes têm números de Gödel diferentes.
- 2) Expressões e símbolos têm números de Gödel diferentes, as primeiras pares e os segundos ímpares.
- 3) Um símbolo considerado como uma expressão tem um número de Gödel diferente do seu número de Gödel como símbolo.

Definição 5. [*Gödelização de uma Sucessão de Expressões*]

Se

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

é uma sucessão de expressões de Θ ,

então o seu número de Gödel

$$g(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

é dado pela equação

$$g(e_1, e_2, \dots, e_n) = 2^{g(e_1)} \cdot 3^{g(e_2)} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{g(e_n)}.$$

São consequências da Definição as proposições seguintes:

- 1) Diferentes sucessões de expressões têm números de Gödel diferentes.
- 2) O número de Gödel de uma sucessão de expressões é par e o expoente de 2 na sua factorização também é par. Difere assim do número de Gödel de símbolos e expressões.

Para fechar esta Secção resta mencionar a cláusula referida na Definição 1 segundo a qual a função g é uma função 1-1, uma injeção de Θ em \mathbb{Z}^+ , isto é, do conjunto dos símbolos de Θ no conjunto dos inteiros positivos. Assim, o contradomínio de Θ não é igual a \mathbb{Z}^+ . Logo, existem inteiros positivos que não são números de Gödel (exemplos: os números 10 e 12).

SECÇÃO 2

RELAÇÕES METAMATEMÁTICAS COMO RELAÇÕES RECURSIVAS

Pelo processo de Gödelização descrito na Secção anterior é possível representar os conceitos mais básicos da análise metamatemática como uma expressão numérica. Nesta Secção queremos apresentar um resultado afim, nomeadamente, o de que as relações da Metamatemática são relações recursivas.

Na sua primitiva demonstração de 1931 Gödel fez uma escolha de 45 predicados e relações metamatemáticas. Deste conjunto damos apenas uma pequena amostra das relações mais básicas da análise metamatemática, para o que utilizaremos as proposições seguintes:

Proposição 1. [*Constante Individual*]

Seja Θ uma Teoria de 1ª Ordem, em que a notação

$K(x)$

denota a relação

“ x é o número de Gödel de uma constante individual de Θ ”.

Então $K(x)$ é uma relação recursiva.

O argumento é simples:

1. Seja

$$a_k$$

uma constante individual de Θ .

2. $K(x)$ é recursiva primitiva $\leftrightarrow K_k(x)$ é recursiva primitiva.
3. Calcular $K_k(x)$ por meio da equação

$$K_k(x) = S | [g(a_k)] - x |.$$

4. Logo $K_k(x)$ é recursiva primitiva.
5. Logo $K(x)$ é recursiva primitiva.

Proposição 2. [*Letra Funcional*]

Seja Θ uma teoria de 1ª Ordem em que a notação

$$F(x)$$

denota a relação

“ x é o número de Gödel de uma letra funcional de Θ ”.

Então $F(x)$ é uma relação recursiva.

O argumento é o seguinte:

1. Seja

$$f_k^n$$

uma letra funcional de Θ .

2. Calcular

$$K_F(x) = S | [g(f_k^n)] - x |.$$

3. Logo $K_F(x)$ é recursiva primitiva.

4. Logo $F(x)$ é recursiva primitiva.

Proposição 3. [*Letra Predicativa*]

Seja Θ uma Teoria de 1ª Ordem em que a notação

$$P(x)$$

denota a relação

“ x é o número de Gödel de uma letra predicativa de Θ ”.

Então $P(x)$ é uma relação recursiva.

O argumento é o seguinte:

1. Seja

$$\alpha_k^n$$

uma letra predicativa de Θ .

2. Calcular

$$K_p(x) = S | [g(\alpha_k^n)] - x |.$$

3. Logo $K_p(x)$ é recursiva primitiva.
4. Logo $P(x)$ é recursiva primitiva.

Proposição 4. [*A Variável como Expressão*]

Seja Θ uma Teoria de 1ª Ordem em que a notação

$$V^\in(x)$$

denota a relação

“ x é o número de Gödel de uma expressão

cujo único elemento é uma variável”.

Então $V^\infty(x)$ é uma relação recursiva.

Dem.:

1. Seja \in a expressão e x_k o seu único elemento.

2. Calcule-se

$$g(x_k)$$

por meio da equação

$$g(x_k) = 15 + 8 \cdot k.$$

3. Então

$$K_{V^\infty}(x) = S |[g(\in)] - x|.$$

4. $K_{V^\infty}(x) = S |[2^{15} + 8 \cdot k] - x|.$

5. Logo $K_{V^\infty}(x)$ é recursiva primitiva.

6. Logo $V^\infty(x)$ é uma relação recursiva.

Outros predicados da Metamatemática são também relações recursivas. Damos a seguir uma lista de alguns dos mais imediatamente úteis:

1. $K^\infty(x)$

“ x é o número de Gödel de uma expressão cujo único elemento é uma constante individual”.

2. $F^\varepsilon(x)$

“ x é o número de Gödel de uma expressão cujo único elemento é uma letra funcional”.

3. $P^\varepsilon(x)$

“ x é o número de Gödel de uma expressão cujo único elemento é uma letra predicativa”.

4. $T^\varepsilon(x)$

“ x é o número de Gödel de um termo de Θ ”.

Em particular este predicado é satisfeito se e somente se

$$\{ V^\varepsilon(x) \vee K^\varepsilon(x) \vee x = g [f_k^n(t_1, \dots, t_n)] \}.$$

5. $\mathfrak{A}(x)$

“ x é o número de Gödel de uma fórmula atômica de Θ ”.

Em particular

$$\mathfrak{A}(x) \leftrightarrow \{ x = g [\alpha_k^n(t_1, \dots, t_n)] \}.$$

6. $A_n(x)$

“ x é o número de Gödel de uma realização do Axioma n ”.

7. $S(x, y, g, v)$

“ x é o número de Gödel de uma fórmula que resulta da substituição de todas as ocorrências livres da variável com

número de Gödel v , na expressão com número de Gödel y , pelo termo com número de Gödel g ".

8. $M(x, y, z)$

" z é o número de Gödel de uma expressão que resulta de expressões com números de Gödel x e y por *Modus Ponens*".

9. $U(x, y)$

" y é o número de Gödel da fórmula que resulta da expressão com número de Gödel x por \forall -Introdução".

10. $D(y, x)$

" y é o número de Gödel de uma demonstração de uma fórmula com o número de Gödel x ".

Os predicados e as relações recursivas **1-10** referem-se a uma Teoria de 1ª Ordem arbitrária Θ e portanto também à Teoria Z . Para esta a relação **10** apresenta ainda entre outras as seguintes formas:

[1^Z] $D(g, v, x, y)$

" y é o número de Gödel de uma demonstração em Z da fórmula com número de Gödel g , na qual todas as ocorrências livres da variável com número de Gödel v são substituídas pelo numeral \bar{x} ".

$$[2^{\mathbb{Z}}] \quad D_{\alpha}(g_1, \dots, g_n, y)$$

“ y é o número de Gödel de uma demonstração em \mathbb{Z} da fórmula $\alpha(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n})$ a qual resulta da inserção destes numerais no lugar das variáveis livres x_1, \dots, x_n da fórmula de saída $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ ”.

$$[3^{\mathbb{Z}}] \quad D^+(g, y)$$

“ g é o número de Gödel de uma fórmula bem formada $\alpha(x_1)$ em que x_1 ocorre livre e y é o número de Gödel de uma demonstração de $\alpha(\overline{g})$ ”.

$$[4^{\mathbb{Z}}] \quad D^-(g, y)$$

“ g é o número de Gödel de uma fórmula bem formada $\alpha(x_1)$ em que x_1 ocorre livre e y é o número de Gödel de uma demonstração de $\neg \alpha(\overline{g})$ ”.

SECÇÃO 3

EQUIVALÊNCIA

ENTRE

RECURSÃO E REPRESENTAÇÃO EM Z

Para demonstrar esta equivalência é útil regressar à relação recursiva $[2^Z] D_\alpha (g_1, \dots, g_n, y)$ segundo a qual y é o número de Gödel de uma demonstração em Z da fórmula

$$\alpha (\overline{g_1}, \dots, \overline{g_n})$$

a qual resulta da inserção destes numerais no lugar das variáveis

$$x_1, \dots, x_n$$

da fórmula de saída

$$\alpha (x_1, \dots, x_n) .$$

Pode servir de exemplo a seguinte sucessão de fórmulas:

1. $\overline{2} + 0 = \overline{2}$
2. $\overline{2} + N(0) = N(\overline{2} + 0)$
3. $\overline{2} + \overline{1} = \overline{3}$
4. $\overline{2} + N(\overline{1}) = N(\overline{2} + \overline{1})$
5. $\overline{2} + \overline{2} = \overline{4}$

O seu número de Gödel é então o número

$$2^{g(1)} \cdot 3^{g(2)} \cdot 5^{g(3)} \cdot 7^{g(4)} \cdot 11^{g(5)}.$$

Tem-se assim em Z uma demonstração da fórmula

$$\alpha(\bar{2}, \bar{2}, \bar{4})$$

que resulta da inserção destes numerais no lugar das variáveis x_1 , x_2 , x_3 .

Podemos assim construir a relação recursiva

$$D_{\alpha}(2, 2, 4, 2^{g(1)} \cdot \dots \cdot 11^{g(5)})$$

a qual representa o facto de que

$$2^{g(1)} \cdot \dots \cdot 11^{g(5)}$$

é o número de Gödel da demonstração em Z da fórmula

$$\alpha(\bar{2}, \bar{2}, \bar{4}).$$

A asserção de que $2^{g(1)} \cdot \dots \cdot 11^{g(5)}$ é o número de Gödel da demonstração em Z de uma fórmula

$$\alpha(k_1, k_2, m)$$

pode ser então representada pela relação recursiva

$$D_{\alpha}(k_1, k_2, m, 2^{g(1)} \cdot \dots \cdot 11^{g(5)}).$$

Uma aplicação das regras \forall -Introdução e \exists -Introdução dá origem à fórmula

$$(\forall k_1) (\forall k_2) (\exists y) D_{\alpha}(k_1, k_2, y, 2^{g(1)} \cdot \dots \cdot 11^{g(5)}).$$

Mas existe o menor y para o qual a relação

$$D_{\alpha}(k_1, k_2, y, 2^{g(1)} \cdot \dots \cdot 11^{g(5)})$$

é verdadeira e obtém-se assim a fórmula

$$\mu y [D_{\alpha} (k_1, k_2, y, 2^{g(1)} \cdot \dots \cdot 11^{g(5)})] .$$

Esta reflexão dá origem à demonstração do resultado de equivalência.

Proposição 1. [*Representação Implica Recursão*]

Se uma função aritmética

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

é representável em Z,

então é recursiva.

Dem.:

1. Sejam os argumentos de f

$$k_1, \dots, k_n .$$

2. Supor

$$f(k_1, \dots, k_n) = m .$$

3. A fórmula bem formada de Z que representa

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

é

$$\alpha (x_1, \dots, x_n, z) .$$

4. Então

$$\vdash \alpha (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n, \bar{m}) .$$

5. Seja g o número de Gödel da demonstração de

$$\alpha (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n, \bar{m}) .$$

6. Tem-se assim a relação

$$D_{\alpha}(k_1, \dots, k_n, m, g)$$

que representa o facto de g ser o número de Gödel da demonstração da fórmula $\alpha(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n}, \overline{m})$.

7. Introduzindo quantificação tem-se

$$(\forall x_1, \dots, x_n) (\exists y) D_{\alpha}(x_1, \dots, x_n, y, g).$$

8. Como $D_{\alpha}(k_1, \dots, k_n, m, g)$ é uma relação recursiva, prefixar o operador μ conserva D_{α} recursiva e tem-se assim

$$\mu y [D_{\alpha}(x_1, \dots, x_n, y, g)] .$$

9. Logo f resulta de uma aplicação do operador μ a uma relação recursiva e é por isso recursiva.

Proposição 2. [*Equivalência entre Recursão e Expressão*]

Uma relação aritmética

$$R(x_1, \dots, x_n)$$

é recursiva se e somente se

$$R(x_1, \dots, x_n)$$

é exprimível em Z.

Dem.:

1. Seja

$$R(x_1, \dots, x_n)$$

uma relação recursiva.

2. Então

$$K_R(x_1, \dots, x_n)$$

é recursiva.

3. Logo

$$K_R(x_1, \dots, x_n)$$

é representável em \mathbb{Z} .

4. Logo

$$R(x_1, \dots, x_n)$$

é exprimível em \mathbb{Z} .

5. Seja

$$R(x_1, \dots, x_n)$$

uma relação aritmética exprimível em \mathbb{Z} .

6. Então

$$K_R(x_1, \dots, x_n)$$

é representável em \mathbb{Z} .

7. Logo

$$K_R(x_1, \dots, x_n)$$

é recursiva.

8. Logo

$$R(x_1, \dots, x_n)$$

é recursiva.

O resultado de equivalência para funções é expresso na proposição seguinte:

Proposição 3. [*Equivalência entre Recursão e Representação*]

*O conjunto das funções recursivas
é igual ao conjunto das funções representáveis em \mathbb{Z} .*

Dem.:

Proposição 1 e Proposição 14, Capítulo I.

CAPÍTULO V

INDECIDIBILIDADE E CONSISTÊNCIA EM Z

SECÇÃO 1

A EXISTÊNCIA DE PROPOSIÇÕES INDECIDÍVEIS

Nesta Secção demonstraremos a existência de proposições indecidíveis usando a primitiva formulação de Gödel dos pressupostos de consistência necessários para a sua execução.

Definição 1. [*Consistência – ω*]

Seja Θ uma Teoria de 1ª Ordem com os mesmos símbolos que Z.

Então diz-se que Θ é uma Teoria ω -inconsistente se e somente se existe uma fórmula bem formada

$$\alpha(x)$$

tal que se tem para qualquer número $n \in \mathbb{N}$

$$\vdash_{\Theta} \alpha(\bar{n})$$

e ao mesmo tempo uma demonstração da fórmula

$$\vdash_{\Theta} (\exists x) \neg \alpha(x).$$

Se ao contrário não é possível em Θ derivar

para qualquer número $n \in \mathbb{N}$ a fórmula

$$\vdash_{\Theta} \alpha(\bar{n})$$

e simultaneamente a fórmula

$$\vdash_{\Theta} (\exists x) \neg \alpha (x)$$

então diz-se que Θ é uma Teoria ω -consistente.

Se adoptarmos para a Teoria Z a interpretação-padrão então a Teoria Z revela-se ser uma Teoria ω -consistente.

O conceito de ω -consistência foi inicialmente descoberto por Tarski e as relações entre a consistência simples e a ω -consistência deixam-se demonstrar na proposição que se segue.

Recorde-se que no caso da inconsistência simples, a demonstração simultânea de uma fórmula α e da sua negação $\neg \alpha$, a tautologia do Cálculo Proposicional

$$[\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)]$$

faz com que seja possível a derivação de qualquer fórmula β , a partir das fórmulas já derivadas $\neg \alpha$ e α . Assim, o caso de inconsistência simples é o caso em que qualquer fórmula é então derivável.

Assim, a demonstração de consistência simples é a demonstração de um resultado mínimo de derivabilidade para uma Teoria de 1ª Ordem, nomeadamente o de que existe pelo menos uma fórmula que não é derivável.

[Como a única letra predicativa de Z é a relação de igualdade usamos para isso a fórmula bem formada

$$(x = x) \rightarrow (x = x)$$

na demonstração seguinte.]

Proposição 1. [ω -Consistência Implica Consistência Simples]

Se Θ é uma Teoria de 1ª Ordem ω -consistente,
então Θ é simplesmente consistente.

Dem.:

1. Θ é ω -consistente.

2. Fazer

$$\vdash_{\Theta} \alpha(x)$$

ser a fórmula bem formada

$$\vdash_{\Theta} (x = x) \rightarrow (x = x).$$

3. Em particular tem-se para qualquer número $n \in \mathbb{N}$

$$\vdash_{\Theta} (\bar{n} = \bar{n}) \rightarrow (\bar{n} = \bar{n}).$$

4. Logo não existe em Θ a demonstração da fórmula

$$\vdash_{\Theta} (\exists x) \neg [(x = x) \rightarrow (x = x)].$$

5. Logo Θ é simplesmente consistente.

Passamos agora à descrição conceptual da construção da proposição indecidível (\heartsuit).

A ideia condutora é a de que os predicados «**demonstrável**» e «**refutável**» da Metamatemática são equivalentes às expressões da Metamatemática aritmetizada «*existe um número y tal que y é o número de Gödel de uma demonstração da fórmula com número de Gödel m* » e «*existe um número y tal que y é o número de Gödel de uma demonstração da negação de uma fórmula com o número de Gödel m* », respectivamente.

1. Seja $\alpha(x_1)$ uma fórmula bem formada em que a variável x_1 ocorre livre e seja g o número de Gödel da fórmula $\alpha(x_1)$.
2. De $\alpha(x_1)$ pode obter-se por inserção no lugar de x_1 a fórmula $\alpha(\bar{g})$.

Seja y o número de Gödel de

$$\alpha(\bar{g}).$$

3. Estamos assim em condições de formar o predicado

$$D^+(g, y).$$

4. Mas pelos resultados do Capítulo IV, $D^+(g, y)$ é uma relação recursiva.
5. Logo é exprimível em Z por uma fórmula bem formada

$$\Delta(x_1, x_2)$$

com x_1 e x_2 livres.

6. Pela definição de expressão tem-se que se a relação é verdadeira e portanto a fórmula

$$D(k_1, k_2)$$

é verdadeira, então tem-se

$$\vdash \Delta(\bar{k}_1, \bar{k}_2).$$

7. Se a relação é falsa e portanto

$$\neg D(k_1, k_2)$$

então tem-se

$$\vdash \neg \Delta(\bar{k}_1, \bar{k}_2).$$

8. Considerando agora o caso em que a relação é falsa e portanto

$$\vdash \neg \Delta(\overline{k_1}, \overline{k_2})$$

é possível a partir desta fórmula por uma aplicação de \forall -Introdução obter a fórmula

$$(\forall x_2) \neg \Delta(x_1, x_2)$$

em que x_1 continua livre.

9. Seja então m o número de Gödel da fórmula

$$(\forall x_2) \neg \Delta(x_1, x_2).$$

10. A interpretação da fórmula do passo 9. é assim que qualquer que seja o número x_2 ele não é o número de Gödel de uma demonstração da fórmula com o número de Gödel x_1 .

11. Assim se não existe um número que seja o número de Gödel de uma demonstração da fórmula com número de Gödel x_1 , isto equivale a dizer que essa fórmula é indemonstrável.

12. Como x_1 ocorre livre pode ser substituído pelo numeral que representa o número de Gödel da fórmula

$$(\spadesuit) (\forall x_2) \neg \Delta(x_1, x_2).$$

13. Assim obtém-se a fórmula bem formada fechada

$$(\heartsuit) (\forall x_2) \neg \Delta(\overline{m}, x_2).$$

14. Pelos passos 1-3. o predicado

$$D^+(g, y)$$

é satisfeito se e somente se g é o número de Gödel de uma fórmula bem formada $\alpha(x_1)$ com x_1 livre e y é o número de Gödel de

$$\vdash \alpha(\overline{g}).$$

15. Como a fórmula (\heartsuit) provem da fórmula (\diamond) pela substituição de x_1 por \bar{m} , é-se conduzido à proposição seguinte: o predicado

$$(*) \quad D^+(m, y)$$

é satisfeito se e somente se y é o número de Gödel de

$$\vdash (\heartsuit).$$

Proposição 2. [*Teorema de Gödel*]

Se Z é consistente

então a fórmula (\heartsuit) não é demonstrável em Z

e se Z é ω -consistente

então a fórmula $\neg(\heartsuit)$ não é demonstrável em Z.

Dem. [*Reductio*]:

As duas primeiras hipóteses de consistência da Proposição 2 conduzem naturalmente a uma subdivisão da demonstração em 2 Partes.

Dem. (Parte I.: *Consistência de Z*)

1. Seja Z consistente.
2. Supor

$$\vdash (\forall x_2) \neg \Delta(\bar{m}, x_2).$$

3. Seja k o número de Gödel de uma demonstração em Z da fórmula do passo 2.

4. Então pela Proposição (*), tem-se

$$D^+(m, k).$$

5. Como Δ exprime D^+ em Z tem-se

$$\vdash \Delta(\bar{m}, \bar{k}).$$

6. Mas

$$(\forall x_2) \neg \Delta(\bar{m}, x_2) \rightarrow \neg \Delta(\bar{m}, \bar{k}).$$

7. Logo por 2., 6. e *Modus Ponens*

$$\vdash \neg \Delta(\bar{m}, \bar{k}).$$

8. Logo Z não é consistente.

Dem. (Parte II.: ω -Consistência)

1. Supor Z ω -consistente.

2. A Hipótese da *Reductio* é:

$$\vdash \neg [(\forall x_2) \neg \Delta(\bar{m}, x_2)].$$

3. Mas se Z é ω -consistente então é simplesmente consistente.

4. Logo

$$\neg \vdash (\heartsuit)$$

5. Assim, para todo o n , n não é o número de Gödel de uma demonstração em Z de (\heartsuit) .

6. Então pela Proposição (*)

$$(\forall n) D^+(m, n)$$

é falsa.

7. E logo, para todo o n ,

$$\vdash \neg \Delta(\bar{m}, \bar{n}).$$

8. Na Definição 1 de ω -consistência fazer

$$\alpha(x) = \neg \Delta(\bar{m}, x_2).$$

9. Então pela Definição de ω -Consistência

$$\neg \vdash (\exists x_2) \neg \neg \Delta(\bar{m}, x_2).$$

10. Logo

$$\neg \vdash (\exists x_2) \Delta(\bar{m}, x_2).$$

11. Mas

$$\vdash \neg [(\forall x_2) \neg \Delta(\bar{m}, x_2)] \leftrightarrow \vdash (\exists x_2) \Delta(\bar{m}, x_2).$$

12. Logo Z não é ω -consistente.

Definição 2. [*Indecibilidade*]

Seja \mathfrak{A} uma fórmula bem formada fechada de Z.

Então diz-se que \mathfrak{A} é indecidível em Z se e somente se

\mathfrak{A} não é demonstrável nem refutável em Z. Assim,

$$\neg \vdash \mathfrak{A} \quad e \quad \neg \vdash \neg \mathfrak{A}.$$

Proposição 3. [*Existência da Proposição Indecidível*]

Se Z é ω -consistente então

existe uma fórmula bem formada fechada de Z

que é indecidível.

Dem.:

1. Seja \mathfrak{A} a fórmula bem formada

$$(\forall x_2) \neg \Delta(\bar{m}, x_2).$$

2. Então não existe em Z uma demonstração de

$$\neg [(\forall x_2) \neg \Delta(\bar{m}, x_2)].$$

3. Logo $(\forall x_2) \neg \Delta(\bar{m}, x_2)$

não é refutável em Z .

4. Mas se Z é ω -consistente então é simplesmente consistente.

5. Logo não existe em Z uma demonstração de

$$(\forall x_2) \neg \Delta(\bar{m}, x_2).$$

6. Logo

$$(\forall x_2) \neg \Delta(\bar{m}, x_2)$$

também não é demonstrável em Z .

7. Logo, pela Definição 2, é indecidível.

Passamos agora à interpretação da fórmula bem formada fechada indecidível

$$(\forall x_2) \neg \Delta(\bar{m}, x_2)$$

no modelo-padrão.

1. O predicado Δ exprime a relação D^+ em Z . Assim, a proposição (\heartsuit) ao ser interpretada no modelo-padrão resulta na asserção de que

$$D^+(m, x_2)$$

é falsa para todo o número natural x_2 .

Mas pela Proposição (*) isto significa que não existe uma demonstração em Z da fórmula bem formada fechada (\heartsuit).

Assim a fórmula

$$(\forall x_2) \neg \Delta(\bar{m}, x_2)$$

afirma a sua própria indemonstrabilidade.

2. Seja Z consistente.

Então pela Proposição 2 não existe em Z uma demonstração de

$$(\heartsuit).$$

Logo (\heartsuit) é indemonstrável em Z e portanto verdadeira no modelo-padrão.

Assim, existe uma proposição que é verdadeira no modelo-padrão e para a qual não existe uma demonstração em Z .

Logo, o conjunto das demonstrações de Z não contém todas as proposições verdadeiras no modelo-padrão.

3. Como uma teoria Formal Θ é completa se e somente se para qualquer fórmula bem formada \mathfrak{A} se tem

$$\vdash_{\Theta} \mathfrak{A}$$

ou

$$\vdash_{\Theta} \neg \mathfrak{A},$$

a Teoria Formal Z é assim incompleta.

Ao reflectir sobre a origem desta incompletude é-se levado a pensar que Teoria Z não contém axiomas em número suficiente para tornar a derivação da proposição (\heartsuit) possível.

4. Seja Z^1 uma Teoria Formal para a Aritmética definida como

$$Z^1 = Z \cup \{ (\forall x_2) \neg \Delta(\bar{m}, x_2) \}.$$

Como a proposição $(\forall x_2) \neg \Delta(\bar{m}, x_2)$ é verdadeira, ao ser junta a Z^1 como axioma a sua derivação passa a ser em Z^1 possível.

Mas todas as funções recursivas que são representáveis em Z são também representáveis em Z^1 . Os predicados, as relações e as funções da Metamatemática são também recursivos em Z^1 .

Logo se Z^1 é ω -consistente então também contém uma proposição indecidível \mathfrak{A} , representável por

$$(\forall x_2) \neg \Delta_{Z^1}(\bar{k}, x_2).$$

\mathfrak{A} difere de (\heartsuit) uma vez que

$$\begin{aligned} D_{Z^1}^+ &\neq D^+ \\ \bar{k} &\neq \bar{m} \\ \Delta &\neq \Delta_{Z^1}. \end{aligned}$$

6. Logo, a indecidibilidade da Proposição (\heartsuit) , a incompletude da Teoria Z e a impossibilidade de se encontrar na Teoria Z um equivalente formal para o conceito de verdade, não resultam do número de axiomas usado na Teoria Z .

SECÇÃO 2

INDECIDIBILIDADE EM EXTENSÕES RECURSIVAMENTE AXIOMATIZÁVEIS

Nas Proposições 2 e 3 (da secção anterior) faz-se apelo à hipótese da consistência- ω de Z . Esta hipótese pode ser reduzida à da consistência simples de Z através de uma reformulação da proposição indecidível criada por Rosser.

Para a construção da proposição indecidível reformulada mantemos inalterados os passos 1. a 7. da construção anterior.

Passamos agora à construção da proposição indecidível pelo método de Rosser.

·
·
·

8. A relação

$$D^{\neg}(g, y)$$

é recursiva primitiva.

9. Logo é exprimível em Z pela fórmula bem formada

$$\Delta^{\neg}(x_1, x_2).$$

10. Considere-se agora a fórmula bem formada

$$(\diamond) \quad (\forall x_2) \{ \Delta(x_1, x_2) \rightarrow (\exists x_3) [(x_3 \leq x_2) \wedge \Delta^{\neg}(x_1, x_3)] \}.$$

11. Seja n o número de Gödel da fórmula (\diamond) .
12. Substituir x_1 por \bar{n} na fórmula (\diamond) .
13. Obtém-se assim a fórmula bem formada fechada

$$(\heartsuit) \quad (\forall x_2) \{ \Delta(\bar{n}, x_2) \rightarrow (\exists x_3) [(x_3 \leq x_2) \wedge \Delta^\neg(\bar{n}, x_3)] \}.$$

14. Ora, os predicados

$$D^+(g, y)$$

e

$$D^\neg(g, y)$$

são satisfeitos se e somente se g é o número de Gödel de uma fórmula bem formada $\alpha(x_1)$ com x_1 livre e y é o número de Gödel de uma demonstração de

$$\alpha(\bar{u})$$

respectivamente

$$\neg \alpha(\bar{u}).$$

15. Como n é o número de Gödel de (\diamond) é-se conduzido às proposições seguintes:

$$(**) \quad D^+(n, y)$$

é satisfeito se e somente se y é o número de Gödel de uma demonstração em Z de (\heartsuit) ;

$$(***) \quad D^\neg(n, y)$$

é satisfeito se e somente se y é o número de Gödel de uma demonstração em Z de $\neg(\heartsuit)$.

Proposição 1. [*Teorema de Gödel*]

Se Z é consistente

então as fórmulas (\heartsuit) e $\neg(\heartsuit)$ são indemonstráveis em Z.

Dem. [*Reductio*]:

As duas fórmulas conduzem naturalmente a uma divisão da demonstração em 2 partes.

Dem.: (Parte I: (\heartsuit))

1. Supor Z consistente.
2. Supor (\heartsuit) demonstrável em Z e portanto

$$\vdash (\forall x_2) \{ \Delta(\bar{n}, x_2) \rightarrow (\exists x_3) [(x_3 \leq x_2) \wedge \Delta^\neg(\bar{n}, x_3)] \}.$$

3. Seja k o número de Gödel da demonstração em Z de (\heartsuit) .
4. Então, pela Proposição (**), tem-se

$$D^+(n, k).$$

5. Como Δ exprime D^+ em Z, então tem-se

$$\vdash \Delta(\bar{n}, \bar{k}).$$

6. Mas, por \forall -Eliminação, da fórmula (\heartsuit) obtém-se a fórmula

$$\vdash \Delta(\bar{n}, \bar{k}) \rightarrow (\exists x_3) [(x_3 \leq \bar{k}) \wedge \Delta^\neg(\bar{n}, x_3)].$$

7. Mas pelos passos 5., 6. e *Modus Ponens*

$$\vdash (\exists x_3) [(x_3 \leq \bar{k}) \wedge \Delta^\neg(\bar{n}, x_3)].$$

8. Como Z é por hipótese consistente e

$$\vdash (\heartsuit)$$

então não existe em Z uma demonstração de

$$\neg(\heartsuit).$$

9. Logo, pela Proposição (***)

$$\Delta^\neg(n, y)$$

é falsa para todo o $y \in \mathbb{N}$.

10. Como Δ^\neg exprime D^\neg em Z , tem-se

$$\vdash \neg \Delta^\neg(\bar{n}, \bar{j})$$

para todo o $j \in \mathbb{N}$.

11. Em particular

$$\vdash \neg \Delta^\neg(\bar{n}, 0) \wedge \neg \Delta^\neg(\bar{n}, \bar{1}) \wedge \dots \wedge \neg \Delta^\neg(\bar{n}, \bar{k}).$$

12. Então tem-se

$$\vdash (\forall x_3) [(x_3 \leq \bar{k}) \rightarrow \neg \Delta^\neg(\bar{n}, x_3)].$$

13. Mas pelo Cálculo de Predicados

$$(\forall x_3) [(x_3 \leq \bar{k}) \rightarrow \neg \Delta^\neg(\bar{n}, x_3)] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \neg (\exists x_3) [(x_3 \leq \bar{k}) \wedge \Delta^\neg(\bar{n}, x_3)].$$

14. Logo

$$\vdash \neg (\exists x_3) [(x_3 \leq \bar{k}) \wedge \Delta^\neg(\bar{n}, x_3)].$$

15. Mas 14. é a negação de 7..

16. Logo Z é inconsistente.

Dem.: (Parte II.: $\neg(\heartsuit)$)

1. Supor

$$\vdash \neg (\forall x_2) \{ \Delta(\bar{n}, x_2) \rightarrow (\exists x_3) [(x_3 \leq x_2) \wedge \Delta^\neg(\bar{n}, x_3)] \}.$$

2. Seja r o número de Gödel da demonstração de

$$\neg (\heartsuit) .$$

3. Então pela Proposição (***) tem-se

$$\Delta^\neg(n, r) .$$

4. Como Δ^\neg exprime D^\neg em Z , tem-se

$$\vdash \Delta^\neg(\bar{n}, \bar{r}) .$$

5. Como Z é consistente, não existe em Z uma demonstração da fórmula bem formada

$$(\heartsuit) .$$

6. Logo, pela Proposição (**) tem-se

$$D^+(n, y)$$

falsa para todo o $y \in \mathbb{N}$.

7. E como Δ exprime D^+ em Z , tem-se

$$\vdash \neg \Delta(\bar{n}, \bar{j})$$

para todo o $j \in \mathbb{N}$.

8. Em particular tem-se em Z

$$\vdash \neg \Delta(\bar{n}, 0) \wedge \neg \Delta(\bar{n}, \bar{1}) \wedge \dots \wedge \neg \Delta(\bar{n}, \bar{r}) .$$

9. Logo,

$$\vdash (x_2 \leq \bar{r}) \rightarrow \neg \Delta(\bar{n}, x_2) .$$

10. Suponha-se agora que

$$\bar{r} \leq x_2 .$$

11. Mas pelo passo 4.

$$\Delta^\neg(\bar{n}, \bar{r}) .$$

12. Então por 10. e 11.

$$(\bar{r} \leq x_2) \wedge [\Delta^\top(\bar{n}, \bar{r})] .$$

13. Logo, por \exists -Introdução

$$(\exists x_3) [(x_3 \leq x_2) \wedge \Delta^\top(\bar{n}, x_3)] .$$

14. Logo, pelo Teorema da Dedução

$$\vdash (\bar{r} \leq x_2) \rightarrow (\exists x_3) [(x_3 \leq x_2) \wedge \Delta^\top(\bar{n}, x_3)] .$$

15. Mas em Z tem-se

$$\vdash (x_2 \leq \bar{r}) \vee (\bar{r} \leq x_2) .$$

16. Mas pela tautologia

$$[(\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \delta) \wedge (\alpha \vee \beta)] \rightarrow (\gamma \vee \delta) ,$$

dos passos 9., 14. e 16. obtém-se

$$\vdash \neg \Delta(\bar{n}, x_2) \vee (\exists x_3) [(x_3 \leq x_2) \wedge \Delta^\top(\bar{n}, x_3)] .$$

17. Logo

$$\vdash \Delta(\bar{n}, x_2) \rightarrow (\exists x_3) [(x_3 \leq x_2) \wedge \Delta^\top(\bar{n}, x_3)] .$$

18. E assim

$$\vdash (\forall x_2) \{ \Delta(\bar{n}, x_2) \rightarrow (\exists x_3) [(x_3 \leq x_2) \wedge \Delta^\top(\bar{n}, x_3)] \} .$$

19. Logo

$$\vdash (\heartsuit) .$$

20. Logo Z é inconsistente.

Proposição 2. *[Existência da Proposição Indecidível]*

Se Z é consistente

então existe em Z uma proposição indecidível.

Passamos agora à interpretação da proposição indecidível (\heartsuit).

1. Pelas proposições (**) e (***) o predicado

$$D^+(n, x_2)$$

significa que x_2 é o número de Gödel de uma demonstração em Z de (\heartsuit) e o predicado

$$D^\neg(n, x_3)$$

significa que x_3 é o número de Gödel de uma demonstração de Z de $\neg(\heartsuit)$.

2. Logo, a proposição (\heartsuit) afirma que se existe uma demonstração em Z de (\heartsuit) então existe uma demonstração em Z , com um número de Gödel ainda menor, da proposição $\neg(\heartsuit)$.

3. Ora pelo Teorema 1, se Z é consistente então (\heartsuit) não é demonstrável. Assim, se Z é consistente, (\heartsuit) é verdadeira no modelo-padrão.

4. Então existe em Z uma fórmula que é verdadeira e que não é demonstrável.

Terminamos esta Secção com um esboço do conceito de Extensões Recursivamente Axiomatizáveis de uma Teoria de 1ª Ordem Θ .

Começamos com uma análise sinóptica das condições suficientes para a aplicação do Teorema de Gödel a uma Teoria de 1ª Ordem Θ . As seguintes condições têm que ser satisfeitas:

i) As relações D^+ e D^- têm que ser exprimíveis em Θ .

ii) Para qualquer fórmula bem formada

$$\alpha(x)$$

e qualquer $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \vdash_{\Theta} \alpha(0) \wedge \alpha(\bar{1}) \wedge \dots \wedge \alpha(\bar{k}) \rightarrow \\ \rightarrow (\forall x) [x \leq \bar{k} \rightarrow \alpha(x)]. \end{aligned}$$

iii) Para qualquer número k

$$\vdash_{\Theta} (x \leq \bar{k}) \vee (\bar{k} \leq x).$$

A condição segundo a qual D^+ e D^- têm que ser exprimíveis em Θ será satisfeita se D^+ e D^- forem relações recursivas, uma vez que qualquer relação recursiva é exprimível em Θ .

Seja $A_p^{\Theta}(x)$ a propriedade « x é número de Gödel de uma axioma próprio de Θ ». Então a notação

$$\{A_p\}^{\Theta}$$

representa o conjunto dos números de Gödel dos axiomas próprios de Θ . É fácil demonstrar que se

$$\{A_p\}^{\Theta}$$

é um conjunto recursivo então as relações D^+ e D^- são recursivas.

Definição 1. [*Teoria Recursivamente Axiomatizável*]

Seja Θ uma teoria axiomática e

seja Θ^* uma teoria com o mesmo conjunto de teoremas de Θ .

Então diz-se que Θ é recursivamente axiomatizável

se e somente se o conjunto

$$\{A_p\}^{\Theta^*}$$

é recursivo.

Proposição 3. [*Extensão Indecidível*]

Qualquer extensão consistente recursivamente axiomatizável de Z

tem uma proposição indecidível.

Dem.:

1. Todas as relações recursivas exprimíveis em Z são também exprimíveis numa extensão de Z .
2. As (últimas) condições *i-iii*) se são satisfeitas em Z também são satisfeitas numa extensão de Z .
3. Mas se estas condições são satisfeitas então o Teorema de Gödel é aplicável também na extensão.
4. Logo existe na extensão uma proposição indecidível.

Para caracterizar o género de incompletude de Z a que se é conduzido a partir do Teorema de Gödel é necessária a proposição seguinte:

Proposição 4. [*Tese de Church*]

*A noção formal de conjunto recursivo
é equivalente
à concepção intuitiva de um conjunto efectivamente decidível.
Assim, um conjunto é recursivo
se e somente se é efectivamente decidível.*

Esta proposição, conhecida pelo nome de **Tese de Church**, goza de uma larga, embora não universal aceitação. Como uma teoria é axiomática se existe um processo efectivo para determinar se uma fórmula bem formada é um axioma, isto equivale a dizer que uma teoria é axiomática se o conjunto dos axiomas é recursivo.

Proposição 5. [*Extensão Axiomática Indecidível*]

*Se Z_i é uma extensão axiomática de Z
então tem uma proposição indecidível.*

Dem.:

1. Se Z_i é uma teoria axiomática então o conjunto dos axiomas é efectivamente decidível.
2. Logo, pela Tese de Church, é recursivo.
3. Logo, pela Proposição 3, tem uma proposição indecidível.

Definição 2. [*Incompletude Essencial*]

*Uma Teoria de 1ª Ordem Θ é essencialmente incompleta
se e somente se
qualquer extensão consistente recursivamente axiomatizável
tem uma proposição indecidível.*

SECÇÃO 3

O PROBLEMA DA CONSISTÊNCIA DE Z

Para a reflexão sobre o problema da consistência de Z, a parte I da demonstração da Proposição 1 da Secção anterior desempenha o papel essencial.

Aí, o argumento é que

se Z é consistente então (♥) é indemonstrável.

Então, se a esta proposição juntarmos uma demonstração da consistência de Z obtemos, por *Modus Ponens*, de novo, a indemonstrabilidade da proposição indecidível.

O problema consiste então em conceber a possibilidade de formular uma proposição que represente a consistência de Z e que possa ser expressa na linguagem de Z.

Descrição Conceptual das Fórmulas \odot , \diamond , \clubsuit

1. Começamos por introduzir a predicado binário

$$D_m(y, x)$$

que se interpreta como “ y é o número de Gödel de uma demonstração de uma *fbf* com o número de Gödel x ”.

2. Esse predicado é recursivo primitivo e por isso exprimível em Z por uma fórmula bem formada

$$\Delta_m(x_1, x_2).$$

3. Seja x o número de Gödel de uma *fbf* e

$$N_0(x)$$

o número de Gödel da sua negação. Essa função é recursiva primitiva e por isso representável em Z por uma *fbf*

$$v_0(x_1, x_2).$$

4. Então a *fbf*

$$\begin{aligned} \odot \quad (\forall x_1) (\forall x_2) (\forall x_3) (\forall x_4) \neg [\Delta_m(x_1, x_3) \wedge \\ \wedge \Delta_m(x_2, x_4) \wedge v_0(x_3, x_4)] \end{aligned}$$

expressa a consistência de Z .

5. Assim, a demonstração da parte I da Proposição 1 pode ser expressa pela proposição

$$(\spadesuit) \quad \text{Se } \{ Z \text{ é consistente} \} \text{ então } \{ (\heartsuit) \text{ é indemonstrável} \}.$$

6. Recorrendo ao processo de gödelização e portanto da representação dos objectos de Z por meio dos seus números de Gödel, toda a demonstração da fórmula (\spadesuit) pode ser expressa em Z .

7. Assim, onde ocorre a primeira expressão

$$\{ Z \text{ é consistente} \}$$

insere-se a fórmula (\odot) . Onde ocorre a segunda expressão

$$\{ (\heartsuit) \text{ é indemonstrável} \}$$

insere-se a própria fórmula (\heartsuit) , uma vez que esta fórmula afirma precisamente a sua própria indemonstrabilidade. A conectiva proposicional é também representável e é-se assim conduzido à fórmula

$$(\clubsuit) \quad \vdash \quad \odot \rightarrow \heartsuit.$$

A esta síntese simplificada da construção da proposição (\clubsuit) está associado o trabalho efectivo de realizar as inserções que levam de (\diamond) a (\clubsuit). Para dar uma ideia das dimensões desse trabalho basta referir que ele é realizado ao longo de cerca de 50 páginas nos *Grundlagen der Mathematik II*, de Hilbert e Bernays.

Esta síntese tem por isso implícito esse trabalho.

Proposição 1. [*Segundo Teorema de Gödel*]

Se Z é consistente

então a fórmula (\odot) é indemonstrável em Z.

Dem.:

1. Cons (Z).
2. $\vdash \odot$.
3. $\vdash \odot \rightarrow \heartsuit$.
4. $\vdash (\forall x_2) \neg \Delta(\bar{m}, x_2)$.
5. \neg Cons (Z).
6. $\neg \vdash \odot$.

A interpretação da Proposição 1 é de que se Z é consistente então não existe uma demonstração da consistência de Z por meio de conceitos que sejam eles próprios formalizáveis em Z.

A hipótese da consistência na Proposição 1 é necessária porque se Z não é consistente então qualquer fórmula pode ser demonstrada em Z , em particular também a fórmula (\odot) .

Assim é interessante ter que concluir que um sistema inconsistente permite a demonstração da sua própria consistência.

Juntando o Primeiro Teorema de Gödel com a Definição de Consistência Simples obtém-se a equivalência

$$\heartsuit \leftrightarrow \odot$$

por meio do raciocínio seguinte:

1. Se (\heartsuit) é indemonstrável em Z então é simplesmente consistente, pela Definição de Consistência Simples. Logo,

$$\heartsuit \rightarrow \odot.$$

2. Pelo Teorema de Gödel, se Z é consistente então (\heartsuit) é indemonstrável. E assim,

$$\odot \rightarrow \heartsuit.$$

O Segundo Teorema de Gödel pode ser descrito como uma conclusão negativa acerca do problema da demonstração da consistência de um sistema por meio de concepções mais elementares do que as formalizáveis no sistema.

Segundo o programa de Hilbert a justificação de processos de dedução como o Princípio do Terceiro Excluído aplicados a domínios infinitos só poderia ser realizada por meio de uma demonstração de Consistência do Sistema Formal em que esses processos se deixassem representar.

No entanto, na demonstração de Consistência só poderiam ser utilizados processos de dedução mais evidentes do que os processos infinitários, cuja eliminação deveria ser precisamente realizada pela formalização.

A concepção de Hilbert era a de que os processos de dedução evidentes, os processos finitariamente evidentes, eram apenas uma parte do raciocínio clássico, sendo uma outra parte formada por processos de dedução infinitários.

Assim seguir-se-ia naturalmente que para a demonstração da Consistência de Z os conceitos necessários seriam apenas uma parte de todos os conceitos que se podem formalizar em Z .

O Segundo Teorema de Gödel prova que estes fins são inatingíveis, porque a demonstração de Consistência é irrealizável mesmo utilizando todos os processos de Z , os mais e os menos evidentes. *A fortiori* é irrealizável utilizando apenas os processos finitariamente evidentes de Z .

Definição 1. [*Incompletude - ω*]

Uma Teoria de 1ª Ordem Θ diz-se ω -incompleta se e somente se existe uma fórmula bem formada

$$\alpha(x)$$

tal que

$$\vdash_{\Theta} \alpha(\bar{n})$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$ e

$$\neg \vdash_{\Theta} (\forall x) \alpha(x).$$

Proposição 2. [*Incompletude - ω de Z*]

*Se Z é consistente
então Z é ω -incompleta.*

Dem.:

1. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\vdash \neg \Delta(\bar{n}, \bar{k}).$$

2. Mas

$$\vdash (\forall x_2) \neg \Delta(\bar{n}, x_2)$$

não tem uma demonstração em Z.

3. Logo

$$\neg \vdash (\forall x_2) \neg \Delta(\bar{n}, x_2)$$

4. Logo Z é ω -incompleta.

Estamos agora em condições de mencionar a concepção de uma Teoria que é ao mesmo tempo consistente e ω -inconsistente.

Para o fazer apela-se ao resultado já conhecido de Teorias de 1ª Ordem em geral, segundo o qual se uma fórmula fechada $\neg \alpha$ de uma Teoria Θ não é demonstrável em Θ , então a Teoria Θ^+ definida como

$$\Theta^+ = \Theta \cup \{ \alpha \}$$

é consistente.

O conceito de consistência aparece relativizado se considerarmos um novo aspecto das relações entre verdade e demonstração.

Se se definir Z^+ como o resultado de juntar à teoria Z a negação da fórmula \heartsuit como axioma, a nova teoria é demonstravelmente consistente. Um argumento por *reductio* mostra que se Z^+ é inconsistente então existe uma demonstração de \heartsuit em Z , contrariando o Teorema 1 de Gödel. A inconsistência de Z^+ dá-nos as demonstrações de \heartsuit e $\neg \heartsuit$ em Z^+ . Logo $\neg \heartsuit \vdash \heartsuit$ e pelo Teorema da Dedução

$$\vdash \neg \heartsuit \rightarrow \heartsuit .$$

Uma aplicação de *Modus Ponens* dá-nos $\vdash \heartsuit$.

No entanto, como \heartsuit é verdadeira no modelo-padrão, $\neg \heartsuit$ é falsa. Assim $\neg (\heartsuit)$ é falsa e demonstrável em Z^+ . Logo a consistência simples por si só não pode ser garantia contra a possibilidade de uma *teoria formal* demonstrar uma proposição intuitivamente falsa. Finalmente, a existência de uma teoria formal simplesmente consistente mas ω -inconsistente era conhecida por Tarski já em 1927 e, no seu ensaio de 1933, "*Algumas Considerações Sobre os Conceitos de Consistência- ω e Completude- ω* ", no Teorema 4-d Tarski mostra como se produz teorias consistentes mas ω -inconsistentes fazendo extensões em teorias com incompletude- ω . É nesse ensaio que Tarski menciona e reconhece que Gödel descobriu independentemente como produzir extensões consistentes mas ω -inconsistentes de teorias originalmente consistentes. A demonstração de Gödel pode ser lida na página 277 de "*Acerca de Proposições Formalmente*

Indecidíveis nos Principia Mathematica e de Sistemas Relacionados [“O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo”, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1979) ver a nota 46 da mesma página.].

Em particular, se uma teoria T é consistente e ω -inconsistente então é também ω -incompleta. Pela definição de ω -inconsistência tem-se $\vdash \alpha(\bar{n})$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e ao mesmo tempo $\vdash (\exists x) \neg \alpha(x)$. Logo, pela definição de consistência, $\neg \vdash (\forall x) \alpha(x)$, o que prova a ω -incompletude da teoria consistente.

SECÇÃO 4

A NATUREZA DO CONCEITO DE VERDADE NO RACIOCÍNIO ARITMÉTICO

Nesta Secção vamos apresentar o resultado essencial acerca do conteúdo do conceito de Verdade no raciocínio aritmético.

Para atingir este fim começamos por definir uma variante da função metamatemática substituição.

Definição 1. [*Substituição Monádica*]

Seja g o número de Gödel de uma fórmula bem formada

$$\alpha(x_1)$$

com x_1 livre.

Então a função monádica

$$S(g)$$

denota o número de Gödel da fórmula bem formada

$$\alpha(\bar{g}).$$

Proposição 1. [*Representabilidade da Substituição Monádica*]

A função

$S(g)$
é φ -representável.

Dem.:

1. A função substituição monádica deixa-se reduzir ao caso já conhecido da função substituição triádica.

2. A fórmula da redução é

$$S(g) = \text{Sub} [g, \text{Num}(g), 2^{g(x_1)}].$$

3. Como a função triádica é recursiva a função monádica também é.

4. Logo é representável.

Assim o resultado da substituição na fórmula com número de Gödel g na ocorrência livre da variável x_1 pelo numeral denotado por g é uma função recursiva primitiva e representável.

Consideremos agora uma teoria de 1ª Ordem com igualdade K , com os mesmos símbolos da Teoria Z . Então a notação

$$\{ T_K \}$$

representa o conjunto dos números de Gödel dos teoremas da Teoria K .

Assim, se x é o número de Gödel de um teorema de K ,

$$x \in \{ T_K \}.$$

Queremos agora demonstrar que a relação de pertença a

$$\{ T_K \}$$

é inexprimível em K .

Proposição 2. [*Inexprimibilidade da Relação de Pertença a $\{ T_K \}$*]

Se K é consistente e a função monádica S é representável em K , então a relação de pertença a $\{ T_K \}$ é inexprimível em K .

Dem.:

A demonstração é por *Reductio*, vindo assim a demonstrar que K é inconsistente.

Na *Parte I* da demonstração analisamos as hipóteses e as inferências que se seguem das definições.

Na *Parte II* estabelecemos a proposição

$$\neg (n \in \{ T_K \});$$

e na *Parte III*

$$n \in \{ T_K \}.$$

Dem.: (Parte I.: *Hipóteses e Inferências das Definições*)

1. Supor S representável em K .
2. Supor a relação de pertença a

$$\{ T_K \}$$

exprimível em K .

3. Infere-se assim a existência de fórmulas bem formadas

$$\Sigma (x_1, x_2)$$

e

$$\Theta(x_2)$$

tais que:

1) Se

$$S(k) = j$$

então

$$\vdash_K \Sigma(\bar{k}, \bar{j}).$$

2) $\vdash_K (\exists^1 x_2) \Sigma(\bar{k}, x_2).$

3) Se

$$k \in \{ T_K \}$$

então

$$\vdash_K \Theta(\bar{k}).$$

4) Se

$$\neg [k \in \{ T_K \}]$$

então

$$\vdash_K \neg \Theta(\bar{k}).$$

4. Seja agora

$$\alpha(x_1)$$

a fórmula bem formada com a configuração seguinte:

$$(*) \quad (\forall x_2) [\Sigma(x_1, x_2) \rightarrow \neg \Theta(x_2)].$$

5. Seja m o número de Gödel da fórmula (*).

6. É agora possível construir a fórmula

$$\alpha(\bar{m})$$

com a seguinte configuração:

$$(**) \quad (\forall x_2) [\Sigma (\bar{m}, x_2) \rightarrow \neg \Theta (x_2)].$$

7. Seja n o número de Gödel da fórmula (**).

8. Então

$$S(m) = n .$$

Dem.: (parte II.: $n \notin \{ T_K \}$)

9. Então pela inferência 1) do passo 3. tem-se

$$\vdash_K \quad \Sigma (\bar{m}, \bar{n}) .$$

10. Ora na teoria K ou

$$\vdash_K \quad \alpha (\bar{m})$$

ou

$$\neg \vdash_K \quad \alpha (\bar{m}) .$$

11. Se

$$\neg \vdash_K \quad \alpha (\bar{m})$$

então

$$\neg (n \in \{ T_K \})$$

e pela inferência 4) do passo 3. tem-se

$$\vdash_K \quad \neg \Theta (\bar{n}) .$$

12. Mas se

$$\vdash_K \quad \alpha (\bar{m})$$

então

$$\vdash_K \quad (\forall x_2) [\Sigma (\bar{m}, x_2) \rightarrow \neg \Theta (x_2)] .$$

13. Então por \forall -Eliminação

$$\vdash_K \quad \Sigma (\bar{m}, \bar{n}) \rightarrow \neg \Theta (\bar{n}) .$$

14. Mas pelo passo 9.

$$\vdash_K \quad \Sigma (\bar{m}, \bar{n}) .$$

15. Logo por *Modus Ponens*

$$\vdash_K \quad \neg \Theta (\bar{n}) .$$

16. Logo por 11. e 15.

$$\vdash_K \quad \neg \Theta (\bar{n}) .$$

Dem.: (Parte III.: $n \in \{ T_K \}$)

17. Do passo 9. tem-se

$$\vdash_K \quad \Sigma (\bar{m}, \bar{n}) .$$

e, pela inferência 2) do passo 3., obtém-se

$$\vdash_K \quad \Sigma (\bar{m}, x_2) \rightarrow x_2 = \bar{n} .$$

18. Mas pelo passo 16.

$$\vdash_K \quad \neg \Theta (\bar{n})$$

logo

$$\vdash_K \quad x_2 = \bar{n} \rightarrow \neg \Theta (x_2) .$$

19. Logo

$$\vdash_K \quad \Sigma (\bar{m}, x_2) \rightarrow \neg \Theta (x_2) .$$

20. Então por \forall -Introdução

$$\vdash_K \quad (\forall x_2) [\Sigma (\bar{m}, x_2) \rightarrow \neg \Theta (x_2)] .$$

21. Então

$$\vdash_K \quad \alpha (\bar{m}) .$$

22. Logo pelo passo 7.

$$n \in \{ T_K \}.$$

23. E assim pela inferência 3) do passo 3.

$$\vdash_K \Theta(\bar{n}).$$

24. Logo, por 16. e 23., K é inconsistente.

Proposição 3. [*O Conjunto $\{T_K\}$ Não É Recursivo*]

Se K é consistente então o conjunto $\{T_K\}$

não é recursivo.

Dem.:

1. A função $S(g)$ é recursiva primitiva e logo representável em K .

2. Pela proposição 2 a relação de pertença ao conjunto

$$\{ T_K \}$$

não é exprimível em K .

3. Logo, a sua função característica

$$K_{\{T_K\}}$$

não é representável em K .

4. Então a função

$$K_{\{T_K\}}$$

não é recursiva.

5. Logo o conjunto

$\{ T_K \}$

não é recursivo.

Definição 2. [*Indecidibilidade Recursiva*]

Uma Teoria de 1ª Ordem com igualdade K

diz-se ser recursivamente indecidível

se e somente se o conjunto

$\{ T_K \}$

não é recursivo.

Definição 3. [*Indecidibilidade Recursiva Essencial*]

Uma teoria de 1ª Ordem com igualdade K

diz-se ser recursiva e essencialmente indecidível

se e somente se

K e qualquer extensão consistente de K

é recursivamente indecidível.

Se se aceitar a Tese de Church então a indecidibilidade recursiva é equivalente à indecidibilidade efectiva.

Então não existe um algoritmo para decidir a propriedade de ser teorema.

Assim, a inexistência de um tal algoritmo implica que a percepção de uma fórmula bem formada como sendo um teorema, reflecte um acto criador e não um acto mecânico.

Proposição 4. [**Z** *É Recursiva e Essencialmente Indecidível*]

*Se Z é consistente
então Z é recursiva e essencialmente indecidível.*

Dem.:

1. Seja K uma extensão consistente de Z .
2. Como qualquer função recursiva é representável em Z , é também representável em K .
3. Logo a relação de pertença ao conjunto
 $\{ T_K \}$
não é exprimível em K .
4. Logo o conjunto
 $\{ T_K \}$
não é recursivo.
5. Logo K é recursiva e essencialmente indecidível.

Situando-nos agora no modelo-padrão, passamos a considerar as fórmulas bem formadas de Z que são verdadeiras neste modelo.

A estas fórmulas podem ser atribuídos números de Gödel. Então a notação

$$\{ V \}$$

denota o conjunto dos números de Gödel das fórmulas bem formadas de Z que são verdadeiras no modelo-padrão.

Em particular diz-se que o conjunto

$$\{ V \}$$

é um conjunto aritmético se e somente se

i) existe uma fórmula bem formada de Z

$$\alpha(x)$$

tal que

ii) $\{ V \}$

é o conjunto dos números m para o qual a *fbf*

$$\alpha(\bar{m})$$

é verdadeira no modelo-padrão.

Proposição 5. [*Teorema de Tarski*]

O conjunto

$$\{ V \}$$

não é aritmético.

Dem.:

1. Seja K uma extensão de Z .
2. Formar os axiomas de K com todas as fórmulas bem formadas que são verdadeiras no modelo-padrão.
3. Então

$$\{ T_K \} = \{ V \}.$$

4. K é consistente uma vez que tem o modelo-padrão.
5. Como qualquer função recursiva é representável em K , a relação de pertença ao conjunto

$$\{ V \}$$

não é exprimível em K , uma vez que pelo passo 3.

$$\{ T_K \} = \{ V \}$$

e a relação de pertença a

$$\{ T_K \}$$

não é exprimível em K .

6. Mas uma relação é exprimível em K se e somente se é a interpretação padrão de uma fórmula bem formada de Z .
7. Logo, não existe a fórmula bem formada

$$\alpha(x)$$

de Z que satisfaça a definição de aritmético.

8. Logo, o conjunto

$$\{ V \}$$

não é aritmético.

Assim, o Teorema de Tarski afirma que a concepção de verdade aritmética não é aritmeticamente definível.

APÊNDICE I

GÖDEL - 1931	«Os Elementos do Programa de Hilbert»
Teorema I.: <i>Substituição Conserva Recursão</i>	Proposição 1, Capítulo I, Secção 2
Teor. II.: “ \sim ” e “ \vee ” <i>Conservam Recursão</i>	Prop. 6, Cap. I, Sec. 4
Teor. III.: <i>Igualdade é uma Relação Recursiva</i>	Prop. 1, Cap. I, Sec. 4
Teor. IV.: <i>Aplicações de “\forall”, “\exists” e “μ” Conservam Recursão</i>	Prop. 7 e 8, Cap. I, Sec. 4
Teor. V.: <i>Expressibilidade de uma Relação Recursiva</i>	Definição 1, Cap. III, Secção 2
Teor. VI.: <i>Indecibilidade</i>	Prop. 2, Cap. V, Sec. 1
Teor. VII.: <i>Representabilidade das Funções Recursivas</i>	Prop. 26, Cap. III, Sec. 5
Lema I.: <i>Sucessões de Números Naturais Representadas por Proposições Existencias</i>	Prop. 23, Cap. III, Sec. 5
Teor. VIII.: <i>Existência Generalizada de Proposições Indecidíveis</i>	Prop. 5, Cap. V, Sec. 2
Teor. IX.: <i>Existência de Proposições Indecidíveis no Cál. de Pred. de 1ª Ordem</i>	—
Teor. X.: <i>Redução de Problemas da Forma $(\forall x) F(x)$ a Problemas do C. de Pred. de 1ª Ordem</i>	—
Teor. XI.: <i>Indemonstrabilidade da Consistência</i>	Prop. 1, Cap. V, Sec. 3